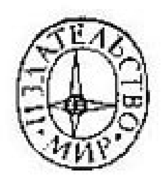
YU.A. SHASHKIN

CARACTERÍSTICA EULERIANA

LECCIONES POPULARES DE MATEMÁTICAS

YU. SHASHKIN

CARACTERÍSTICA EULERIANA



Editorial Mir
Moscú

ÍNDICE

PREFACIO

Leonardo Euler (1707—1783), eminente matemático del siglo XVIII, nació en la ciudad suiza de Basilea. Desde los veinte años vivió en San Petersburgo, Berlín y luego de nuevo en San Petersburgo. Euler jugó un papel insigne en el desarrollo de las matemáticas, la mecánica, la física y la técnica. Fue el pionero de las investigaciones matemáticas en Rusia.

En 1758, en las «Memorias de la Academia de Ciencias de Petersburgo» publicó la demostración de la fórmula

$$V - A + C = 2 \qquad (0.1)$$

que enlaza entre sí los números de vértices V, aristas A y caras C de un poliedro convexo arbitrario.

El folleto que se ofrece al lector está dedicado a la fórmula de Euler (0.1), así como a sus diferentes análogos y aplicaciones. Supongamos, por ejemplo, que el plano tiene una familia finita de rectas que se intersecan en cierto número de puntos V «vértices» dividiendo el plano en C «caras», mientras que las mismas se dividen por los vértices en A «aristas». Entonces resulta que

$$V - A + C = 1. \qquad (0.2)$$

Al igual que la fórmula (0.1) es justa para un poliedro convexo cualquiera, la fórmula (0.2) es justa para una familia de rectas cualquiera sobre el plano y no depende de su número ni de la disposición mutua de las mismas.

En general, lo notable del hecho consiste en que si está dada una figura (de cierta clase determinada), comoquiera que esté dividida en partes (caras, aristas y vértices) que de cierta manera «lindan» unos con otros, la suma de signo variable V — A + C, denominada característica de Euler de la figura, conserva un valor constante.

En la primera parte de dicho folleto (§§ 1—7) se calculan las características de Euler de la recta, el plano, el espacio tridimensional, polígonos de diferentes clases, los límites de los poliedros convexos. En los §§ 4 y 5 se exponen las aplicaciones de la característica de Euler con arreglo al cálculo del área del polígono y la suma de sus ángulos exteriores.

En la segunda parte del folleto (§§ 8—12) la característica de Euler de una figura (por ejemplo, de un polígono) se determina axiomáticamente como la «función aditiva» de dicha figura. En este sentido ella se parece al área del polígono. Para deducir el área de la unión de dos polígonos es necesario, como se sabe, restar de la suma de sus áreas el área de su intersección. Precisamente ésta es la propiedad de aditividad del área. Uno de los axiomas de la característica de Euler exige que ésta tenga una propiedad análoga. El segundo axioma (el de «normación») distingue el área y la característica. La «normación» de la primera de estas dos funciones del polígono exige que el área del cuadrado unitario sea igual a la unidad. La característica de Euler se «norma» de tal manera que resulte igual a la unidad en cada polígono convexo.

En el § 9 se demuestra la existencia de la característica de Euler que satisface los axiomas dados, y en el § 10, la equivalencia de sus dos determinaciones diferentes. El § 12 (final) contiene las aplicaciones de la característica de Euler a ciertos problemas de geometría combinatoria, corriente nueva de las matemáticas, con la cual el lector puede familiarizarse, por ejemplo, en los libros [2], [5], [6] (las cifras entre corchetes pertenecen a los números de los libros en la bibliografía aducida en la pág. 109).

En el folleto no se dice nada de la invariación topológica de la característica de Euler y, en general, de su papel en la topología. El lector puede obtener datos sobre esto en el libro de V.G. Boltianski y V.A. Efremóvich [1].

Yu. A. Shashkin

§ 1. FÓRMULAS DE EULER PARA LA RECTA Y EL PLANO

La variante más simple de la fórmula de Euler surge al dividir la recta L en partes por un conjunto finito de puntos. Si se escogen sobre la recta V puntos, éstos la dividen en V—1 segmentos y dos rayos, es decir, en V + 1 partes. Designando el número de dichas partes por A, tendremos

$$V - A = -1. \tag{1.1}$$

Precisamente ésta es la *fórmula de Euler* para la recta. Esta fórmula demuestra que la diferencia V — A es

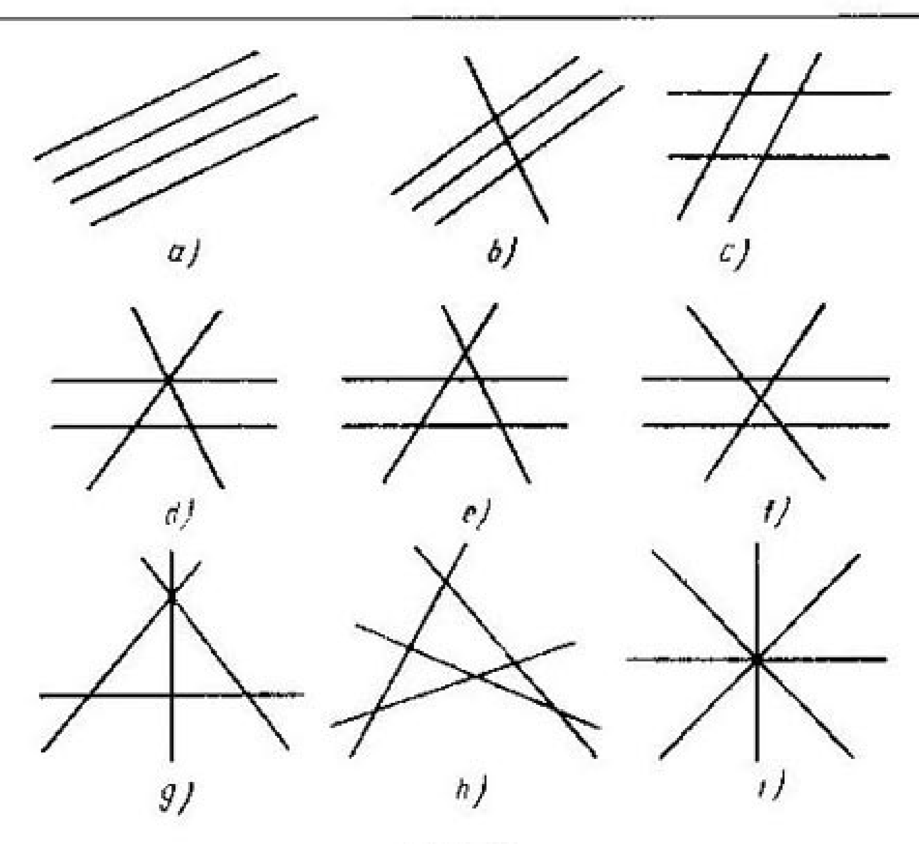


Fig. 1

constante, es decir, no depende del número de puntos escogidos ni de su posición, y expresa, por tanto, una propiedad de la misma recta.

Pasemos ahora al plano Q y tratemos de obtener para éste la fórmula de Euler análoga a la (1.1). Este problema

es más complicado e interesante para el plano que para la recta: efectivamente, la división se efectúa en este caso por una familia finita de rectas situadas sobre el plano de maneras diferentes. Por ejemplo, dos rectas pueden intersecarse o ser paralelas. Existen cuatro casos de disposición mutua de tres rectas, a saber: las tres rectas son paralelas; dos son paralelas, mientras que la tercera las interseca; cada par de rectas tiene un punto común, pero no existe tal punto para las tres; las tres rectas pasan por un punto. Los diferentes casos de disposición de las cuatro rectas pueden verse en la fig. 1; su descripción verbal sería dificultosa. Se podría examinar la disposición de cinco, seis y más rectas; con el crecimiento del número de rectas aumenta rápidamente el número de diferentes formas de disposición.

Cada familia de rectas divide el plano en partes llamadas *caras de partición*; designaremos su número con la letra C. Llámanse *vértices de partición* los puntos de intersección de dichas rectas, y *aristas de partición*, las partes en las cuales las rectas están partidas por los vértices. Designemos con las letras V y A el número de vértices y el número de aristas de partición, respectivamente. La partición puede no tener ni un solo vértice (entonces $V = 0$); será exclusivamente en los casos cuando cada dos rectas son paralelas. Es natural que las propias rectas se consideran aristas de tal partición.

Resulta que los números V, A y C están enlazados entre sí mediante la relación

$$V - A + C = 1. \qquad (1.2)$$

Ésta es la *fórmula de Euler* para el plano; ella muestra que la suma de signo variable $V - A + C$ es constante, es decir, no depende del número de rectas que parten el plano, ni de su disposición mutua. Por tanto la fórmula de Euler expresa la propiedad del propio plano Q.

Demostremos la fórmula (1.2) para una partición que producen n rectas, haciendo previamente unas observaciones.

Primero, en el caso cuando la partición no tiene vértices, la fórmula (1.2) es evidente, puesto que entonces $V = 0$, $A = n$ y $C = n + 1$.

Segundo, demostremos el siguiente lema, útil también para otros casos.

LEMA 1. *Si sobre el plano está dado un número finito de rectas, se puede trazar una nueva recta que no sea paralela a ninguna de las dadas.*

DEMOSTRACIÓN. Efectivamente, sea que están dadas las rectas $L_1, \ldots, L_m$ y sea también que O es un punto cualquiera sobre la recta L_1. Tracemos por el punto O la recta $L'_i \parallel L_i$ $(i = 2, \ldots, m)$, y supongamos que φ_i designa el ángulo entre las rectas L_1 y L'_i pudiendo considerar que $0 \leqslant \varphi_i \leqslant 90°$. Si $\varphi_i = 0$ para todos i, es decir, si todas las rectas dadas son paralelas entre sí, la incógnita será una recta cualquiera no paralela a L_1. En caso contrario elijamos entre dichos ángulos el mínimo positivo; por ejemplo, φ_2. La recta L que pasa por el punto O y forma, respecto a L_1, un ángulo positivo menor que φ_2 es la incógnita. El lema 1 está demostrado.

Tercero, para demostrar la fórmula (1.2) tenemos que hallar las expresiones de dos de las tres magnitudes V, A y C, suponiendo que la tercera magnitud es conocida. Sea que se conoce el número de vértices V (y, naturalmente, el número de rectas n). Resulta, no obstante, que los números C y A no se determinan unívocamente por los números n y V. Por ejemplo, las particiones *c*) y *g*) (fig. 1) tienen un número igual de vértices V = 4, pero diferentes números de caras y aristas. Observando dichas particiones se puede notar que éstas se diferencian en la «estructura» de los vértices: en la partición *c*) por cada vértice pasan dos rectas, mientras que en la partición *g*) hay un vértice, por el cual pasan tres rectas. A fin de considerar esta diferencia introduzcamos la definición siguiente. Llamemos *grado* de un vértice de partición al número de rectas de una familia dada que pasan por él. Por consiguiente, el grado de cualquier vértice es un número natural no menor de dos. Es natural esperar que los números C y A se determinen si se consideran dados, además, de n y V, los grados de todos los vértices. Veremos que esto realmente es así.

Realizaremos el cálculo de aristas y caras de partición por el método de la recta «móvil».

Supongamos que $L_1, \ldots, L_n$ son las rectas dadas y $A_1, \ldots, A_V$, los vértices de partición (fig. 2; en dicha figura $n = 5$ y $V = 7$). Tracemos por *cada* par de vértices una recta auxiliar; designemos dichas rectas por $M_1, \ldots, M_h$. Entre ellas figuran, por supuesto, todas las rectas dadas $L_1, \ldots, L_n$. (En la fig. 2 no están dibujadas

las rectas auxiliares «superfluas», es decir, las que difieren de las rectas $L_1, \ldots, L_n$, a fin de no recargarla; el lector comprobará que las mismas deberían trazarse por los pares de puntos A_1A_5, A_2A_5, A_2A_7, A_3A_4 y A_6A_7.) Ahora, valiéndonos del lema 1, tracemos la recta auxiliar

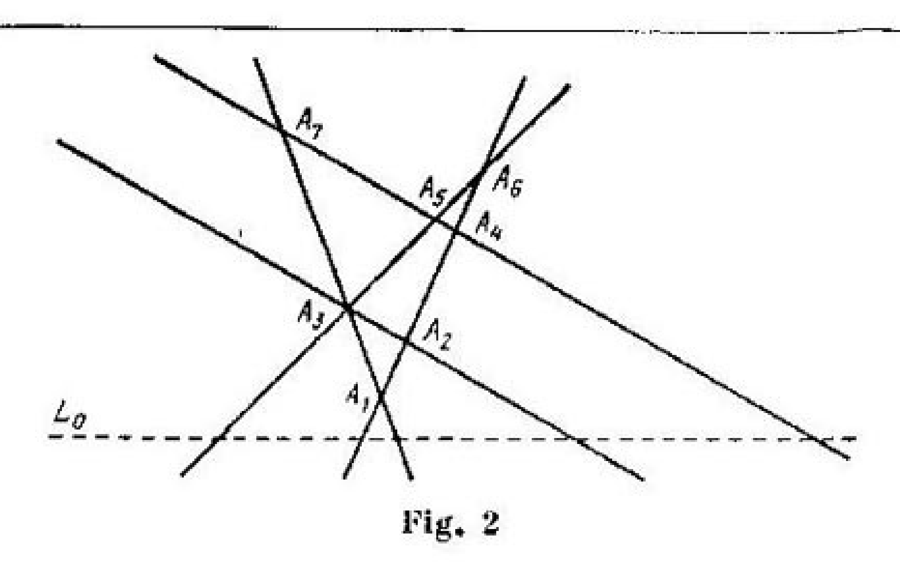


Fig. 2

L_0 no paralela a ninguna de las rectas $M_1, \ldots, M_k$. Supongamos que la recta L_0 está situada, primero, horizontalmente y, segundo, «por debajo» de los vértices $A_1, \ldots$ $\ldots, A_V$. De aquí se desprende que para cada par de vértices A_i y A_j sus distancias de la recta L_0 son diferentes *). Posteriormente este hecho se expresará mediante las palabras «todos los vértices se encuentran a diferente altura», sobrentendiendo su altura sobre el nivel de la recta L_0. Supongamos que el número del vértice corresponde al orden de crecimiento de la altura, es decir, que A_1 es el vértice más bajo, A_2 se encuentra más arriba que A_1, pero más bajo que A_3, etc. y, finalmente, que A_V es el vértice superior.

La recta «móvil» L estará situada horizontalmente, coincidiendo en su posición inicial con la recta L_0 y subiendo luego a partir de ésta por el plano. La recta L puede utilizarse para el cálculo de las aristas de partición: puesto que se interseca con las rectas $L_1, \ldots, L_n$ y con cada una de ellas en un punto particular, en la posición

*) Realmente, si A_i y A_j se hallan a igual distancia de la recta L_0, la recta que pasa por dichos vértices será paralela a L_0. Sin embargo, tal hecho no puede existir por el trazado de L_0.

inicial ella encuentra n aristas. Ahora hagamos subir la recta L por el plano paralelamente a sí misma. Hasta el momento de encontrarse con el vértice más bajo A_1 el número de aristas intersecadas por ésta se mantiene invariable e igual a n. Al pasar por el vértice A_1, dicho número ha de variar: aparecerán nuevas aristas cuyo número es igual al grado α_1 del vértice A_1. Por eso el número total de aristas que la recta L encuentra hasta el momento dado será igual a $n + \alpha_1$ y se mantendrá así hasta el encuentro con el vértice siguiente A_2. Si el grado de este último es α_2, entonces, una vez que L pase por A_2, el número de aristas ya encontradas para este momento aumentará de nuevo y será igual a $n + \alpha_1 + \alpha_2$, etc. Por fin, después de pasar por el último vértice, el más alto, A_V con el grado α_V, dicho número será igual a $n + \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_V$. Así pues, el número total de aristas de partición será igual a

$$A = n + \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_V$$

o bien, escribiéndolo más brevemente,

$$\mathrm{A} = n + \sum_{i=1}^{V} \alpha_i. \qquad (1.3)$$

Hallaremos el número de caras de partición de la manera siguiente: la recta L se parte, en la posición inicial, por las rectas $L_1, \ldots, L_n$ en $n + 1$ partes; cada una de estas partes se encuentra en la cara de partición que le corresponde, «contando» también dicha cara. Por lo tanto, la recta L encuentra en la posición inicial $n + 1$ caras y este número no varía hasta que ésta no suba hasta el vértice A_1. Una vez pasado el vértice A_1, aparecen, como hemos visto, nuevas aristas cuyo número es α_1. Está claro que el número de caras nuevas encontradas en este caso por la recta L será igual a $\alpha_1 - 1$ *). Por eso el número total de caras encontradas hasta este momento será igual a $1 + n + \alpha_1 - 1$. Después de pasar por el vértice A_2 este número total aumenta en $\alpha_2 - 1$, etc; finalmente, cuando L interseque el vértice más alto A_V, el último, el número total de caras aumentará en $\alpha_V - 1$. Por eso

$$\mathrm{C} = n + 1 + (\alpha_1 - 1) + (\alpha_2 - 1) + \ldots + (\alpha_V - 1)$$

---

*) Dichas caras nuevas están encerradas entre α_1 aristas nuevas.

o bien

$$C=1+n+\sum_{i=1}^{V}(\alpha_i-1)=1+n+\sum_{i=1}^{V}\alpha_i-\sum_{i=1}^{V}1=$$

$$=1+n-V+\sum_{i=1}^{V}\alpha_i. \quad (1.4)$$

Aquí $\sum_{i=1}^{V} 1$ designa la suma de las unidades tomada por todos los vértices de partición y por eso igual a V.

Así pues, hemos expresado el número de aristas y el número de caras a través del número de vértices y sus

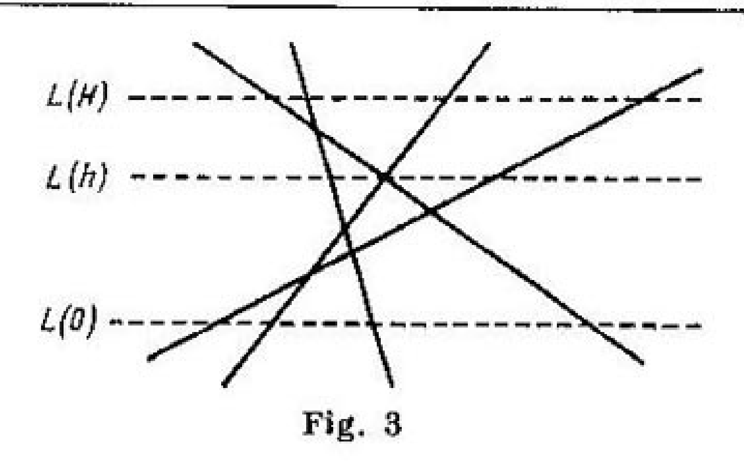


Fig. 3

grados. De las fórmulas (1.3) y (1.4) se ve, entre tanto, que los números A y C dependen sólo de la suma de grados y no dependen, por ejemplo, del orden en que aparecen. Ahora a partir de (1.3) y (1.4) se obtiene inmediatamente la fórmula de Euler:

$$V-A+C=V-n-\sum_{i=1}^{V}\alpha_i+1+n-V+\sum_{i=1}^{V}\alpha_i=1.$$

Notemos que la demostración de dicha fórmula puede simplificarse si no se trata de obtener la expresión explícita para los números A y C. A saber: sea que todos los vértices de partición se encuentran dentro de una banda horizontal cuyo ancho es H (fig. 3). Designemos por L (0) el límite inferior de dicha banda, es decir, la recta L en su posición inicial, por L (H), el límite superior de la banda, es decir, la recta L en su posición final, y por L (h), la recta L situada a una distancia h de L (0).

Sea que A (h) designa el número de aristas ya encontradas por la recta L en movimiento hasta el momento de ocupar la posición L (h); un sentido análogo tienen las designaciones V (h) y C (h). Los valores de A (h), V (h) y C (h) varían en función de h; tenemos que demostrar que su suma de signo variable S (h) = V (h) — A (h) + C (h) se torna igual a 1 para $h = H$. Si $h = 0$, entonces, como hemos visto, V (h) = V (0) = 0, A (0) = n, C (0) = = 1 + n, siendo por eso S (0) = 1. Al pasar la recta L por el vértice A_i, el número A (h) aumenta en α_i, C (h) aumenta en $\alpha_i - 1$ y V (h) aumenta en 1, por eso S (h) no varía su valor. En particular, S (H) = 1, lo que había que demostrar.

PROBLEMAS

1. Demuéstrese que para cualquier partición de una recta por un número finito V de puntos, la suma V + A es impar.

2. Demuéstrese que para cualquier partición del plano por un número finito de rectas, la suma V + A + C es impar.

3. Se dice que las rectas sobre un plano se hallan en *posición general*, si ningunas dos de ellas son paralelas y ningunas tres tienen un punto común. Demuéstrese que para cualquier número natural n existen sobre el plano n rectas de posición general.

4. Pruébese que si la partición del plano se realiza por n rectas de posición general,

$$\mathrm{A} = n^2, \quad \mathrm{C} = 1 + n + \frac{n(n-1)}{2}.$$

5. Demuéstrese la fórmula de Euler (1.2) por el método de la recta móvil, suponiendo que ésta es paralela a una o varias rectas de la familia.

6. Demuéstrese la fórmula de Euler para una familia de rectas de posición general por el método de inducción matemática respecto al número de rectas.

7. Una figura plana se denomina *limitada* (*acotada*) si se encuentra dentro de un círculo de cierto radio (tal vez, muy grande) y *no limitada* (*no acotada*), en caso contrario. Hállese el número de aristas limitadas A_1 (es decir, segmentos) y el de aristas no limitadas A_2 (es decir, rayos), así como el número de caras limitadas C_1 y el de caras no limitadas C_2 para la partición de un plano, que tiene vértices. Pruébese que

$$\mathrm{V} - \mathrm{A}_1 + \mathrm{C}_1 = 1.$$

8. Está claro que la partición de un plano siempre tiene caras y aristas no limitadas. ¿Cuándo tiene caras limitadas (aristas limitadas)?

§ 2. ¿QUÉ ES LA CARACTERÍSTICA DE EULER?

Las fórmulas de Euler para la recta y el plano demostradas en el § 1 son una manifestación del siguiente hecho notable general. Supongamos que Φ es una figura partida de cierta manera en partes que hemos de llamar *vértices*, *aristas* y *caras*. Denotemos el número de vértices, el de aristas y el de caras de partición por V, A y C, respectivamente. Para todos los elementos de partición se utilizará también el nombre unificado *células*, es decir, en vez de las palabras «aristas, caras y vértices de partición» diremos brevemente «células de partición». Resulta que, independientemente del método de partición de la figura Φ en células, la suma de signo variable $V - A + C$ conserva el valor constante o bien, en otras palabras, es invariante respecto al método de partición. Dicha suma se denomina *característica de Euler* de la figura y se designa por la letra griega χ (ji). Por consiguiente, por definición,

$$\chi(\Phi) = V - A + C.$$

Como se ha mostrado antes, la característica de Euler para la recta es igual a -1, y para el plano, a 1.

En la suma de signo variable $V - A + C$ que determina la característica de Euler el orden de los sumandos no es casual: depende de la *dimensión* de las células que corresponden a dichos sumandos. En otras palabras, V designa el número de células de partición de dimensión nula; A, el número de células unidimensionales y C, el de bidimensionales. Señalemos que las células de dimensión nula (o vértices) son puntos, las células unidimensionales (o aristas) son, las más de las veces, segmentos rectilíneos, y las células bidimensionales (caras), polígonos convexos.

La determinación de la característica de Euler aquí dada necesita de una precisión: hay que indicar además qué clases de figuras exponemos al examen, qué se entiende por células en cada caso concreto y, por fin, cómo se determina la partición de la figura en células, es decir, cómo «hacen contacto» entre sí las diferentes células. A estos problemas está dedicado casi todo el § 2.

Así pues, consideremos ciertas clases de figuras, para las cuales es posible determinar la característica de Euler.

Sean $A_1, \ldots, A_n$ diferentes puntos sobre el plano. La *línea quebrada no cerrada* con vértices en dichos puntos se define como el conjunto de segmentos rectilíneos A_1A_2, $A_2A_3, \ldots, A_{n-1}A_n$ llamados *aristas* de la misma. Si $n \geqslant 3$ y los vértices primero y último coinciden (es decir, $A_1 = A_n$), mientras que los demás son diferentes, la quebrada se denomina *cerrada*. Se consideran *adyacentes* dos aristas de la quebrada que tienen un vértice común. La

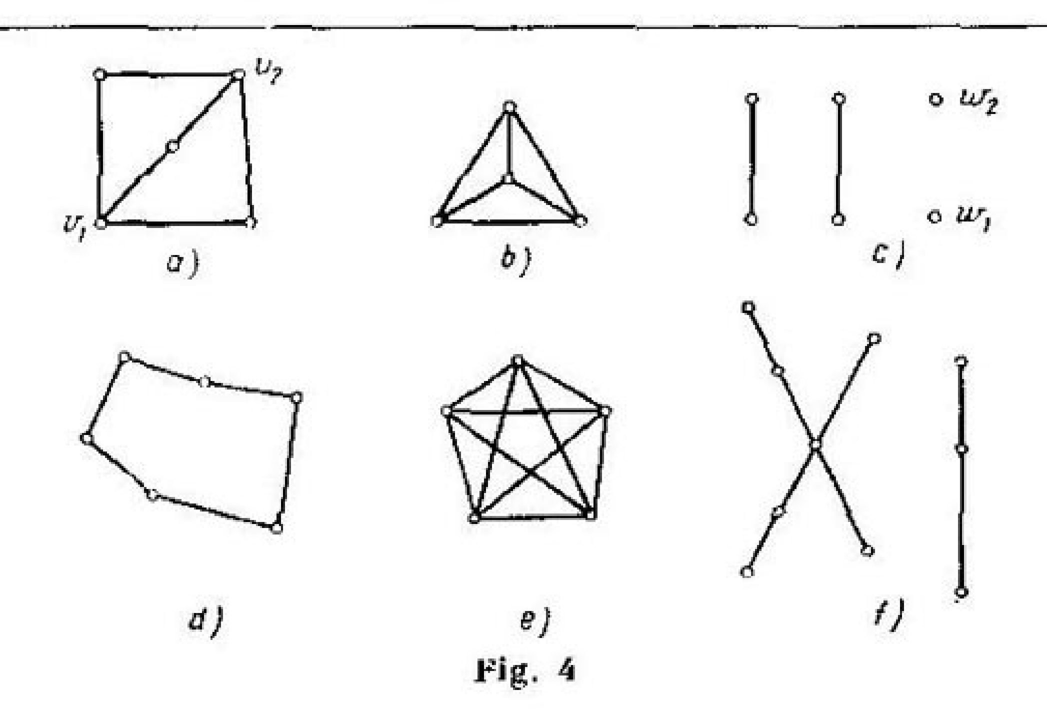


Fig. 4

quebrada (cerrada o no) se denomina *simple* si ningunas dos de las aristas no contiguas tienen puntos comunes. Llamemos *contorno* a una quebrada cerrada simple.

Está claro que la característica de Euler $\chi(L) = V - A$ es igual a 1 para la quebrada no cerrada L y a 0 para la cerrada. Es fácil comprobar también que $\chi(L)$ no varía, si se interpone un número arbitrario m de vértices nuevos dentro de alguna arista, partiéndola así en aristas nuevas, cuya cantidad es $m + 1$ o, por lo contrario, si se substituyen por una varias aristas consecutivas que se encuentran sobre una recta.

Llámase *grafo* a la figura G que consta de un número finito de *vértices* (situados sobre el plano o en el espacio) y de segmentos rectilíneos que unen algunos pares de vértices. Dichos segmentos se denominan *aristas* del grafo. Está claro que, en particular, toda quebrada es un grafo. La característica de Euler del grafo es la diferencia V — A;

es invariante en el mismo sentido que para la quebrada. Puede suceder que el grafo G no tenga aristas, sino que disponga sólo de n vértices; en este caso $\chi(G) = n$. Ejemplos de grafos se exponen en la fig. 4; sus vértices están marcados con pequeños círculos claros. De la figura se desprende que algunas aristas pueden tener puntos de intersección «superfluos», los cuales no son vértices. El

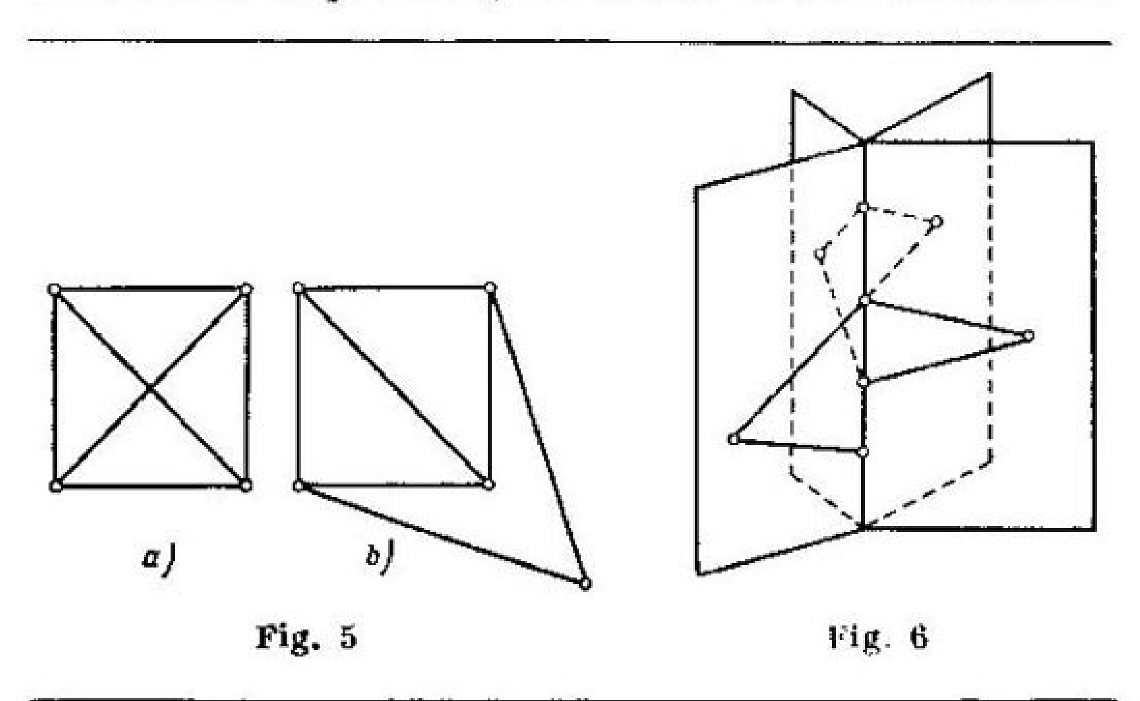


Fig. 5 Fig. 6

lector comprobará que las características de Euler de los grafos a), b), c), d), e), f) en dicha figura son iguales a -1, -2, 4, 0, -5, 2, respectivamente.

Llámase *grado* del vértice de un grafo al número de aristas que unen éste a otros vértices. En la fig. 4, por ejemplo, los vértices v_1 y v_2 del grafo a) tienen el grado 3; los grados de sus otros vértices son iguales a 2. El grafo c) tiene dos vértices con grado 0 (precisamente, w_1 y w_2) y cuatro vértices con grado 1. El grado de cada vértice del grafo b) es igual a 3, y del grafo e), igual a 4. Los vértices con grado 0 se denominan también *aislados*.

El grafo se denomina *conexo* si cualesquiera dos de sus vértices pueden ser unidos por una quebrada no cerrada que consta de las aristas del grafo.

Se dice que el grafo *encaja en el plano* si éste puede trazarse sobre el plano de tal manera que las aristas se intersequen sólo en los vértices. Así es, por ejemplo, el grafo a) representado en la fig. 5 (el llamado grafo *completo* con cuatro vértices), puesto que se puede «volver a trazarlo»

de manera que desaparezcan las intersecciones superfluas de las aristas (fig. 5, *b*). Por cierto que durante esta operación hemos tenido que substituir una arista del grafo por dos aristas e introducir un vértice nuevo. Se suele considerar que en este caso el grafo «no ha variado», por lo menos, su característica de Euler ha conservado su valor. Preste además atención al hecho de que en la fig. 4, *b*) está representado «el mismo» grafo que en la fig. 5, *a*), pero sin intersecciones superfluas de las aristas y sin introducir vértices nuevos. En general, todos los grafos de la fig. 4 menos el *e*) encajan en el plano. Por otro lado, el grafo *e*) (llamado grafo *completo* con cinco vértices) no encaja en el plano, aun cuando se introducen vértices nuevos (véase el problema 13).

Es interesante señalar que cada grafo puede situarse en el espacio sin intersección superflua de las aristas. Demostrémoslo. Sea que el grafo G tiene V vértices y A aristas. Tomemos en el espacio un «libro con A hojas» (fig. 6, dondo A = 4) señalando en su «lomo» V puntos (vértices del grafo). A cada una de las A aristas del grafo le ponemos en correspondencia su hoja del libro dibujando en ésta dicha arista en forma de una quebrada que consta de dos segmentos. Está claro que no hay intersecciones superfluas de las aristas; por cierto que hemos tenido que substituir cada arista por dos nuevas y un vértice nuevo. Notemos, sin demostración, que cada grafo puede situarse en el espacio sin introducir nuevos vértices y sin quebrar las artistas.

Pasemos ahora a la siguiente clase de figuras, polígonos planos, examinando primero los convexos que son los más simples de éstos.

Cada recta divide el plano en dos semiplanos. Con esto se supone que la propia recta se encuentra en cada uno de ellos. En otras palabras, suponemos que ambos semiplanos son cerrados. Llámase *polígono convexo* a la intersección de un número finito de semiplanos a condición de que ésta, primero, esté *limitada*, es decir, se encuentra dentro de un círculo de radio finito, y segundo, sea *bidimensional*, o sea contiene un círculo con un radio que difiere de cero (fig. 7). La última exigencia es equivalente a que el polígono convexo no se encuentre sobre ninguna recta.

Definamos ahora el polígono en general (no obligatoriamente convexo).

Llámase *polígono* a la figura plana M que consta del conjunto de un número finito de polígonos convexos de tal manera que se cumplen las dos condiciones siguientes:

1) dos polígonos convexos cualesquiera no tienen en absoluto puntos comunes, tienen sólo un vértice común, o tienen un lado común;

2) la figura M *es conexa*, es decir, cualesquiera dos puntos de ésta pueden unirse por una quebrada no cerrada que se encuentra por entero en M.

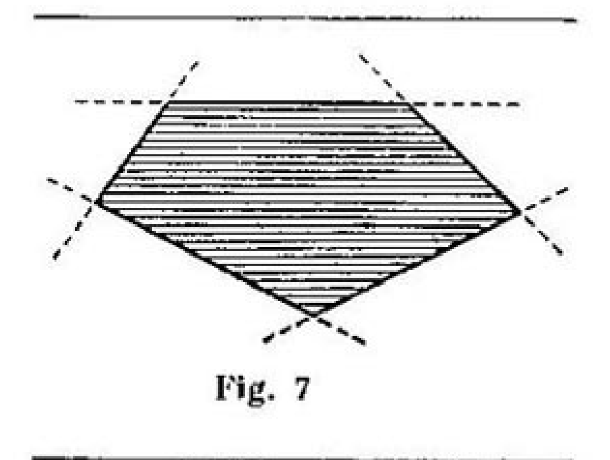


Fig. 7

La última condición significa que el polígono no se divide en pedazos aislados no enlazados entre sí.

De esta definición se desprende claramente qué debe comprenderse por partición del polígono M en células, a saber: llamaremos *caras de partición* a aquellos polígonos convexos, de los cuales está compuesto el polígono M; *aristas de partición*, a los lados de dichos polígonos convexos, y *vértices de partición*, a sus vértices. La fig. 8 ofrece ejemplos de polígonos y sus particiones. Está claro que cada polígono admite diferentes representaciones en forma de la unión de polígonos convexos y tiene por eso diferentes particiones.

Ahora adquiere un sentido exacto la noción de la característica de Euler del polígono. En el párrafo siguiente será demostrado que ésta no depende de la elección del procedimiento de partición.

Es natural distinguir entre los puntos de un polígono los interiores y los de frontera. El punto de un polígono se denomina *interior* si se puede indicar un círculo de cierto radio (aunque sea muy pequeño) con su centro en dicho punto y que está enteramente en el polígono. El punto de un polígono se llama *de frontera* si un círculo de cualquier radio con su centro en dicho punto contiene puntos del propio polígono y puntos de su *complemento* respecto al plano (es decir, puntos del plano que no pertenecen al polígono). En la fig. 9, los puntos A y B son puntos interiores del polígono, C y D, de frontera, E y F, puntos del

complemento. La colección de todos los puntos de frontera de un polígono se denomina *frontera* del mismo.

Demostremos que *la frontera del polígono M es la unión de un número finito de contornos.* Dicha frontera es el grafo G. Mostremos primeramente que cada vértice de este

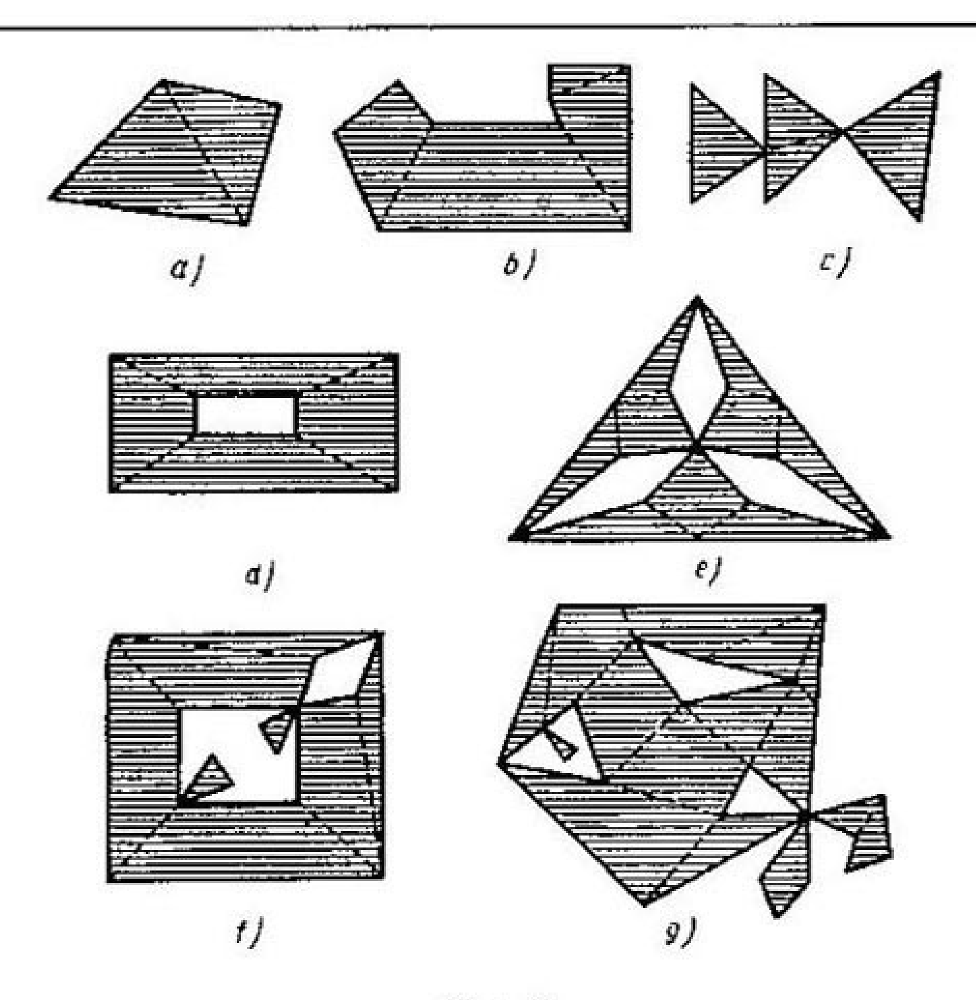


Fig. 8

grafo tiene un grado par. Efectivamente, sea A el vértice del grafo G. Tracemos una circunferencia con el centro en el punto A de un radio tan pequeño que interseque sólo aquellas aristas del grafo que salen de A. Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n$ los puntos consecutivos de intersección de la circunferencia con dichas aristas (fig. 10). Desplacémonos por la circunferencia desde el punto A_1 hacia el punto A_2. luego hacia el A_3, etc. Saliendo del punto A_1 salimos también del polígono M a su complemento, y pasando por el punto A_2 entramos, contrariamente, en el polígono. Dado que al pasar por el último punto A_n entramos de

nuevo en M, mientras que las entradas y las salidas se alternan, el número n tiene que ser par.

Ahora vamos a desplazarnos por las aristas del grafo comenzando desde algún vértice y sin pasar ninguna arista dos veces. Puesto que todos los vértices tienen los grados

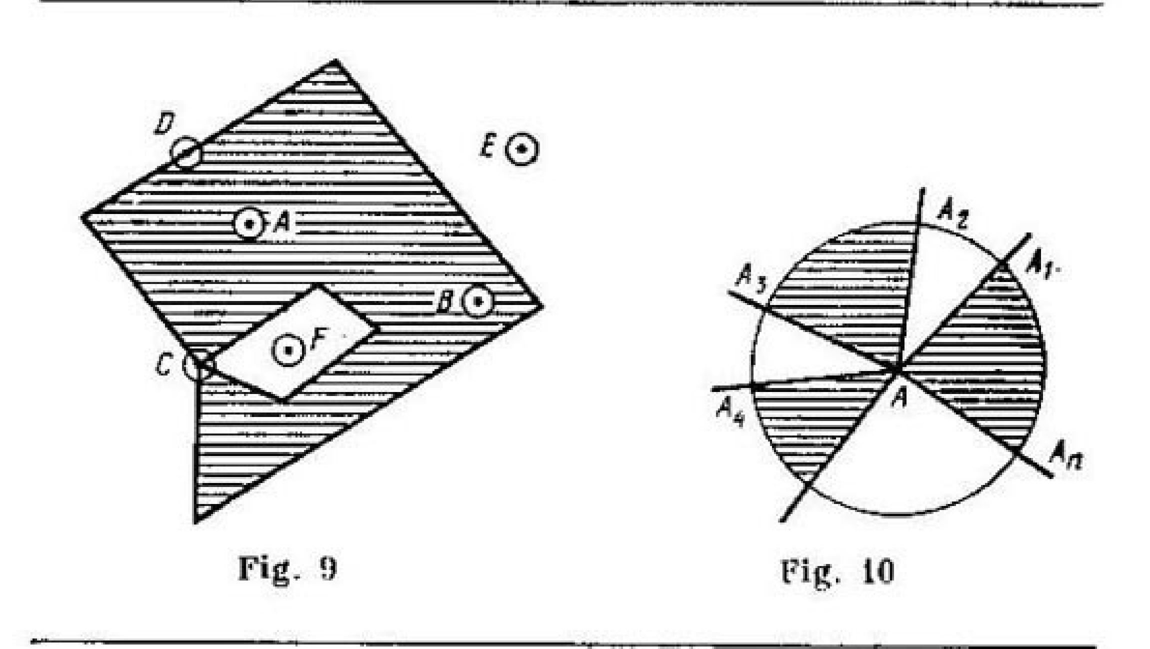


Fig. 9 Fig. 10

pares, entrando en cualquier vértice, siempre tenemos la posibilidad de salir de él. Por otro lado, ya que el número de aristas y vértices del grafo G es finito, tenemos que dar en tal vértice donde ya hemos estado antes. Así se obtiene un contorno. Suprimamos el contorno obtenido en el grafo G. El grafo nuevo volverá a tener sólo vértices con grados pares. Por eso, repitiendo varias veces el recorrido señalado, representaremos todo el grafo G, es decir, la frontera del polígono M, en forma de unión de un número finito de contornos, lo cual era necesario demostrar.

Un polígono se denomina *simple* si su frontera consta de un solo contorno. Así son, por ejemplo, todos los polígonos convexos, así como el polígono *b*) en la fig. 8. Se podría demostrar (no lo hacemos) que el complemento de un polígono simple (respecto al plano) es *conexo*. Poseen dicha propiedad no sólo los polígonos simples (véase, por ejemplo, la fig. 8, *c*).

Si el complemento de un polígono es inconexo, éste constará de varios fragmentos conexos llamados *componentes* (fig. 8, *d*, *e*, *f*, *g*). Un componente siempre es ilimitado;

todos los demás son limitados. A estos últimos componentes los llamaremos *huecos*.

Demostremos que *cada hueco F, junto con su frontera, es un polígono*. Con este propósito basta comprobar que puede ser presentado en forma de unión de polígonos convexos. Tracemos rectas por todos los segmentos que se encuentran dentro de la frontera del hueco F (fig. 11). En este caso se produce cierta partición de todo el plano. Todas las caras limitadas de dicha partición son polígonos convexos. Queda señalar que todos los puntos interiores de cada uno de dichos polígonos se encuentran enteramente en el hueco F o en su complemento y, por consiguiente, el hueco F (junto con su frontera) es igual a la inión de los polígonos de la primera de esas dos clases, lo cual era necesario demostrar.

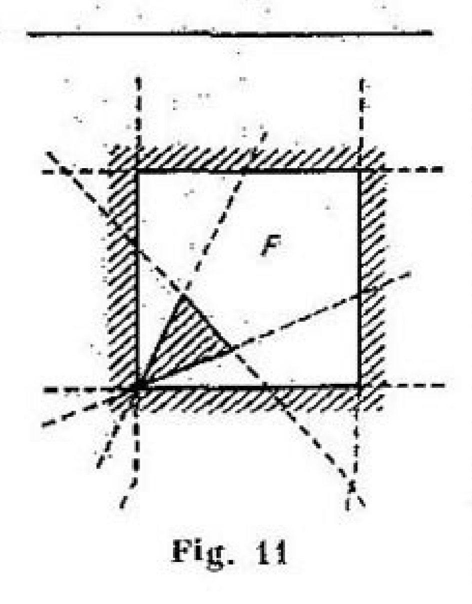


Fig. 11

El hueco de un polígono se denomina *simple* si su frontera es un contorno. En los tres párrafos siguientes (§§ 3, 4 y 5) se examinarán sólo los polígonos simples, así como los que se obtienen a partir de éstos «recortando» un número finito de huecos simples. Con esto se excluyen del examen, en particular, los polígonos *c*), *f*), *g*) en la fig. 8.

Hagamos una observación que se refiere a la división del polígono M en células. A veces resulta más cómodo considerar caras de partición los polígonos convexos *abiertos* que constituyen el polígono M (es decir, sin sus fronteras), y aristas de partición, los lados *abiertos* de dichos polígonos convexos (sin sus extremos). En virtud de este punto de vista, las diferentes células de partición no tienen puntos comunes. Utilizaremos la división en este sentido sólo una vez, en el § 7 (p. 53).

PROBLEMA

9. Sea dada una partición arbitraria del plano por un número finito de rectas. Y sea M la unión de todas sus caras limitadas. Demuéstrese que la figura M es conexa y por eso es un polígono. Demuéstrese que el polígono M es simple o igual a la unión de dos polígonos simples que tienen el único punto común.

§ 3. CARACTERÍSTICA EULERIANA DE LOS POLÍGONOS

Pasamos al cálculo de la característica euleriana de los polígonos basado en el empleo del método de la recta móvil. En relación con esto a lo largo de todo el § 3 se supondrá que los vértices de partición del polígono se encuentran a diferente altura. Al igual que antes, esto puede lograrse valiéndose del lema 1.

Consideremos primeramente el caso de un polígono simple. Introduzcamos la clasificación siguiente de sus vértices. Llamemos al vértice *v saliente hacia arriba*, si el ángulo interior del polígono en dicho vértice es menor que π (posteriormente todos los ángulos se miden en radianes) y si ambos vértices adyacentes a éste se encuentran por debajo de v. Llamemos al vértice *w entrante hacia abajo*, si el ángulo interior en dicho vértice es mayor que π y si ambos vértices adyacentes a éste se encuentran por encima de w. Llamaremos *especiales* a los vértices de estas dos clases, y a todos los demás vértices del polígono, *corrientes*. El motivo de la elección de dichos nombres se aclarará más adelante. En la fig. 12 sobresalen hacia arriba los vértices v_4 y v_9, penetra hacia abajo el vértice v_2; los otros seis vértices son corrientes. Sea α el número de vértices que sobresalen hacia arriba, y β, el número de vértices que penetran hacia abajo.

LEMA 2. *Para cada polígono simple, cuyos vértices se encuentran a diferente altura, es justa la igualdad siguiente*:

$$\alpha - \beta = 1 \tag{3.1}$$

DEMOSTRACIÓN. Apliquemos la inducción respecto al número de lados del polígono. Para los triángulos la igualdad (3.1) es evidente, puesto que cada triángulo tiene un vértice saliente hacia arriba *) y no tiene ningún otro vértice especial. Señalemos que esto es válido también para todos los polígonos convexos. Demostremos la igualdad (3.1) para un polígono simple M que tiene n lados suponiendo que ésta ya está demostrada para todos los polígonos simples con un número de lados menor de n.

---

*) Recuérdese que todos los vértices se encuentran a diferente altura.

Notemos previamente que cada polígono simple M puede dividirse por una diagonal que se encuentra dentro de M en dos polígonos simples, cada uno de los cuales tiene un número de lados menor que M. Efectivamente, sea A el vértice más bajo del polígono M, mientras que B y C, los vértices adyacentes a él (fig. 13). Unamos los puntos B y C por una diagonal. Si tanto sobre el segmento BC como dentro del triángulo ABC no hay otros vértices del polí-

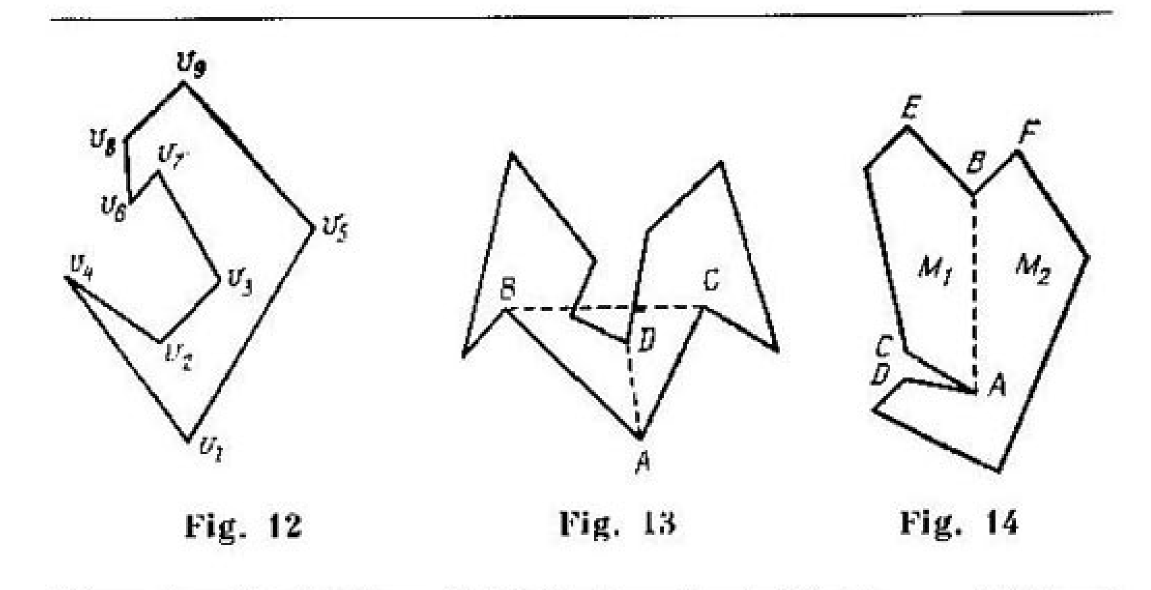


Fig. 12 Fig. 13 Fig. 14

gono M, la diagonal BC nos da la partición necesaria. Pero si tales vértices existen, tomemos el más bajo de ellos; supongamos que sea el punto D. En este caso la partición necesaria del polígono M se da por su diagonal AD.

Volvamos a la demostración de la igualdad (3.1). Supongamos que la diagonal AB divide M en dos polígonos simples M_1 y M_2 y es, por tanto, su lado común (fig. 14). Supongamos primeramente, a fin de facilitar la demostración, que el segmento AB está situado verticalmente, designando por A su extremo inferior y por B, el extremo superior; más adelante se indicará cómo hay que variar la demostración, si dicha condición no se cumple. Sea, además, que el polígono M_1 hace contacto con AB a la izquierda, y el polígono M_2, a la derecha.

Si los puntos A y B son los vértices adyacentes de cada uno de los polígonos M_1 y M_2, entonces designemos por C el vértice del polígono M_1 que es el segundo adyacente a A, y por E el segundo vértice de éste que es el segundo adyacente a B. Un sentido análogo tienen las anotaciones

D y F para los vértices del polígono M_2 (fig. 14). Son posibles, no obstante, los casos «exclusivos», cuando los puntos A y B (o uno de ellos) no son vértices de uno de los polígonos M_1 y M_2 (los polígonos 4) en la fig. 15 y 5) de la fig. 16). En estos casos las designaciones están mostradas en las figuras. Puede suceder también que $C = E$ o bien $D = F$.

Asignemos el número $f(v)$ a cada vértice v del polígono M según la regla siguiente:

$$f(v) = \begin{cases} 1 \text{ si } v \text{ sobresale hacia arriba,} \\ -1 \text{ si } v \text{ penetra hacia abajo,} \\ 0 \text{ en los demás casos.} \end{cases}$$

Esto quiere decir que determinamos la función f en los vértices del polígono M. Por ejemplo, en la fig. 14 dicha función toma el valor de 1 en los vértices E y F, el valor de -1 en los vértices A y B y el valor de 0 en todos los demás vértices. Determinemos las funciones f_1 y f_2 en los vértices de los polígonos M_1 y M_2 ateniéndonos a la regla de determinación de f en los vértices de M. Los índices 1 y 2 de f_1 y f_2 muestran precisamente que dichas funciones corresponden a los polígonos M_1 y M_2. En el caso cuando, por ejemplo, el punto A no es un vértice del polígono M_1, nosotros consideramos, no obstante, según la determinación $f_1(A) = 0$. Por tanto, las funciones f_1 y f_2 están determinadas obligatoriamente también en los puntos A y B. Es fácil ver que si v es un vértice del polígono M_1 diferente de los puntos A y B, entonces $f_1(v) = f(v)$; por analogía, $f_2(v) = f(v)$ para todos los vértices v del polígono M_2 que difieren de A y de B.

Ahora podemos volver a escribir la igualdad (3.1) que se necesita demostrar de la manera siguiente:

$$\Sigma f(v) = 1, \tag{3.2}$$

donde la adición se extiende a todos los vértices v del polígono M. Dado que cada uno de los polígonos M_1 y M_2 tiene un número de vértices menor de n, entonces, conforme a la suposición de inducción, para el primero de ellos, se cumple la igualdad siguiente:

$$\Sigma f_1(v) = 1, \tag{3.3}$$

y para el segundo, la igualdad

$$\Sigma f_2(v) = 1, \tag{3.4}$$

donde las sumas se toman respecto a todos los vértices de M_1 y M_2, respectivamente. Sumemos término a término las igualdades (3.3) y (3.4) y añadamos a ambos miembros sumandos iguales; como resultado tenemos lo siguiente:

$$\sum f_1(v) - f_1(A) - f_1(B) + \sum f_2(v) - f_2(A) - \\ - f_2(B) + f(A) + f(B) = 2 - f_1(A) - f_1(B) - f_2(A) - \\ - f_2(B) + f(A) + f(B). \quad (3.5)$$

El primer miembro de la igualdad (3.5) es igual a $\Sigma f(v)$, es decir, a la suma de los valores de la función f respecto a todos los vértices del polígono M. Por eso, para demostrar la igualdad (3.2), basta establecer que

$$f_1(A) + f_1(B) + f_2(A) + f_2(B) - \\ - f(A) - f(B) = 1. \quad (3.6)$$

Demostraremos que

$$f_1(A) + f_2(A) - f(A) = 0, \quad (3.7)$$

$$f_1(B) + f_2(B) - f(B) = 1, \quad (3.8)$$

de donde en seguida se desprende (3.6) y a la vez la justeza del lema 2.

Sea φ_1 el valor del ángulo BAC, φ_2, el valor del ángulo BAD (fig. 14 ó 15). Convengamos en contar ambos ángulos a partir del segmento AB en dirección positiva, es decir, en dirección contraria a la de la manecilla del reloj, lo cual da que $\varphi_1 < \varphi_2$. Dado que el segmento AB (menos sus extremos) se encuentra dentro del polígono M, los valores 0 y 2π de los ángulos φ_1 y φ_2 están «prohibidos». Ahora, como todos los vértices del polígono se encuentran a diferente altura, también estarán «prohibidos» para dichos ángulos los valores $\pi/2$ y $3\pi/2$. Por tanto para demostrar la igualdad (3.7) es necesario examinar seis casos expuestos en la tabla 1 y mostrados en la fig. 15.

Consideremos atentamente el primero de estos casos, cuando $0 < \varphi_1 < \varphi_2 < \pi/2$. En este caso los puntos C y D se encuentran más arriba del punto A, y el ángulo interior CAD del polígono M es mayor que π (su valor es igual a $2\pi - (\varphi_2 - \varphi_1)$). Por eso el vértice A del polígono señalado penetra hacia abajo y, por tanto, $f(A) = -1$. Análogamente, ambos puntos B y D se encuentran más arriba del punto A siendo el ángulo interior BAD

Tabla 1

Número del caso	Desigualdades para los ángulos	$f(A)$	$f_1(A)$	$f_2(A)$
1	$0 < \varphi_1 < \varphi_2 < \pi/2$	-1	0	-1
2	$0 < \varphi_1 < \pi/2 < \varphi_2 < 3\pi/2$	0	0	0
3	$0 < \varphi_1 < \pi/2 < 3\pi/2 < \varphi_2 < 2\pi$	0	0	0
4	$\pi/2 < \varphi_1 < \varphi_2 < 3\pi/2$	0	0	0
5	$\pi/2 < \varphi_1 < 3\pi/2 < \varphi_2 < 2\pi$	0	0	0
6	$3\pi/2 < \varphi_1 < \varphi_2 < 2\pi$	-1	-1	0

del polígono M_2 mayor que π (su valor es igual a $2\pi - \varphi_1$). Por eso el vértice A del polígono M_2 entra hacia abajo y, por consiguiente, $f_2(A) = -1$. Por otro lado,

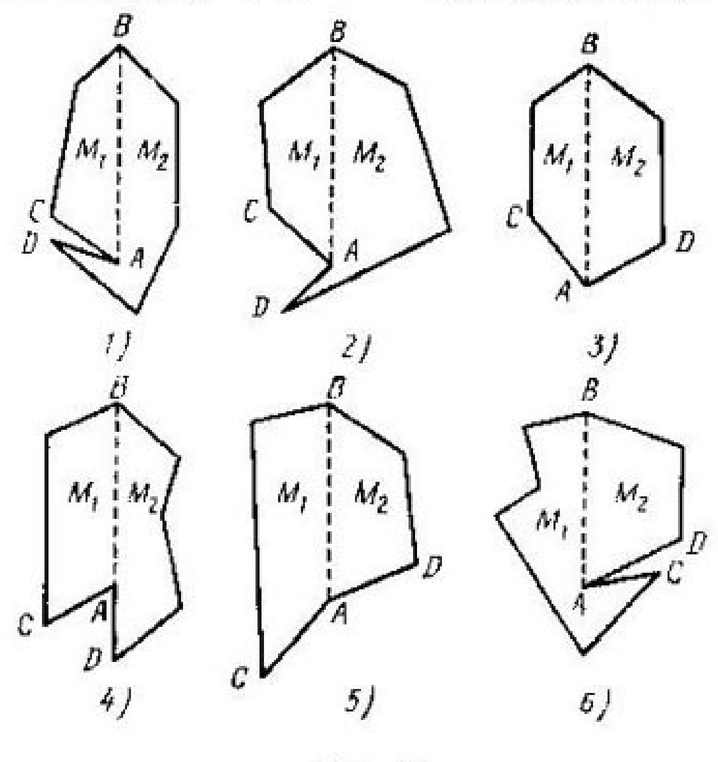


Fig. 15

ambos vértices B y C del polígono M_1 se encuentran más arriba que su vértice A, y, además, su ángulo interior BAC es menor que π (su valor es igual a φ_1). Por eso el vértice A es corriente para M_1 y, por tanto, $f_1(A) = 0$. Así pues, la igualdad (3.7) se satisface para este primer caso.

Los valores de las funciones $f(A)$, $f_1(A)$ y $f_2(A)$ en los otros cinco casos se exponen en la tabla 1. De ésta se desprende que la igualdad (3.7) siempre se cumple.

Sea ψ_1 el valor del ángulo ABF, ψ_2, el valor del ángulo ABE (figs. 14 ó 16). Dichos ángulos con los vértices en

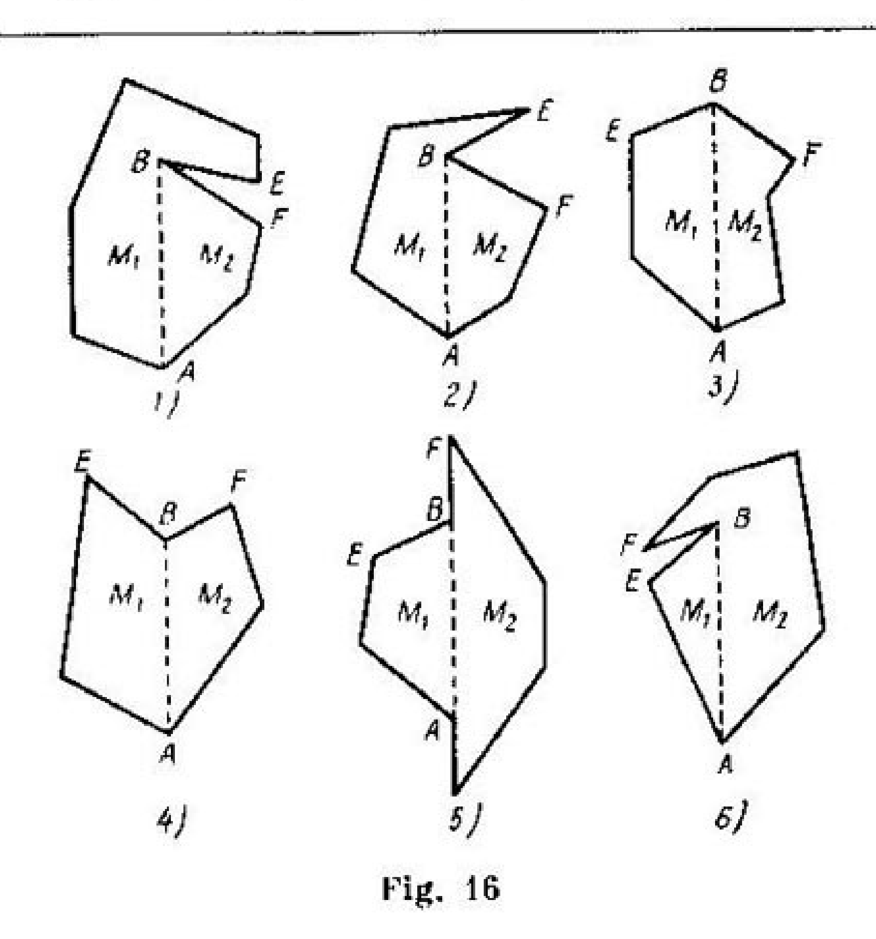


Fig. 16

el punto B se cuentan a partir del segmento BA en sentido positivo. Por eso $\psi_1 < \psi_2$. Al igual que antes, los valores 0, $\pi/2$, $3\pi/2$ y 2π están prohibidos para dichos ángulos. Por tanto, para demostrar la igualdad (3.8) es necesario examinar los seis casos representados en la fig. 16. Las igualdades que enlazan los ángulos ψ_1 y ψ_2 en cada uno de estos casos, así como los valores de las funciones f, f_1, f_2 en el punto B están expuestos en la tabla 2. De la tabla se desprende que la igualdad (3.8) siempre es justa.

Así pues, el lema 2 está demostrado para el caso de la posición vertical del segmento AB. Supongamos que este segmento forma ahora con la recta vertical un ángulo ω, siendo $0 \leqslant \omega < \frac{\pi}{2}$. En este caso a cada uno de los ángulos

Tabla 2

Número del caso	Desigualdades para los ángulos	$f(B)$	$f_1(B)$	$f_2(B)$
1	$0 < \psi_1 < \psi_2 < \pi/2$	0	0	1
2	$0 < \psi_1 < \pi/2 < \psi_2 < 3\pi/2$	0	0	1
3	$0 < \psi_1 < \pi/2 < 3\pi/2 < \psi_2 < 2\pi$	1	1	1
4	$\pi/2 < \psi_1 < \psi_2 < 3\pi/2$	-1	0	0
5	$\pi/2 < \psi_1 < 3\pi/2 < \psi_2 < 2\pi$	0	1	0
6	$3\pi/2 < \psi_1 < \psi_2 < 2\pi$	0	1	0

φ_1, φ_2, ψ_1 y ψ_2 le está «prohibido» tomar los valores 0, 2π, $\frac{\pi}{2} + \omega$, $\frac{3\pi}{2} + \omega$. Por lo demás la demostración no varía.

TEOREMA 1. *La característica euleriana de un polígono simple es igual a* 1.

DEMOSTRACIÓN. Se considera que el polígono está dado con cierta partición. Situémoslo de manera que todos los vértices de partición estén a diferente altura. Además, dicha suposición es poco importante para la justeza del teorema. Vamos a numerar los vértices de partición $v_1, \ldots, v_V$ en orden de crecimiento de su altura, es decir, de tal manera que el vértice v_1 sea el más bajo, el vértice v_2 se encuentre por encima de v_1, etc. De aquí se desprende que si una arista de partición une dos vértices v_i y v_j, entonces uno de éstos es el extremo superior de la arista, y el otro, el inferior. Análogamente, cada arista de partición tiene el único vértice más bajo. Sea $A_i (i = 1, \ldots, V)$ el número de aristas, para las cuales el punto v_i sirve de extremo inferior, y C_i, el número de aristas, para las cuales v_i sirve del vértice más bajo. A partir de lo dicho está claro que el número total de aristas de partición

$$A = A_1 + A_2 + \ldots + A_V, \tag{3.9}$$

y el número total de caras

$$C = C_1 + C_2 + \ldots + C_V. \tag{3.10}$$

Hallemos para cada vértice v_i la relación entre los números A_i y C_i. Sea M_i el polígono formado por todas aquellas caras (y aristas), para las cuales el punto v_i es el vértice más bajo (figs. 17 y 18, donde los polígonos M_i están sombreados). El polígono M_i puede «degenerar», es decir, contener no sólo caras y sus lados sino también

aristas que no se encuentran dentro de la frontera de alguna cara (tales aristas se muestran en las figs. 17 y 18 con trazos gruesos). Consideremos tres casos.

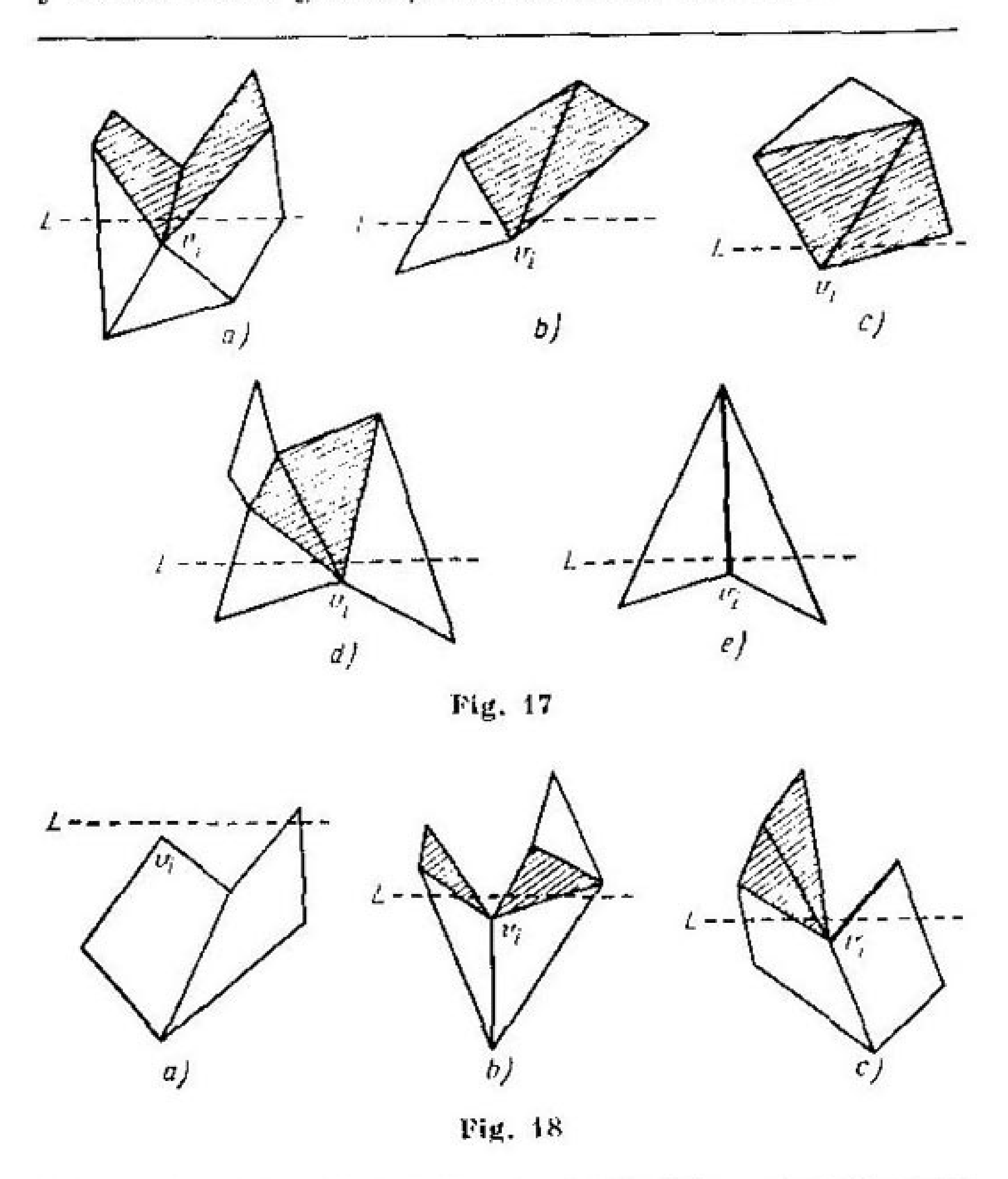


Fig. 17

Fig. 18

1. El punto v_i es un vértice corriente del polígono M o su punto interior (diremos entonces, para simplificar, que v_i es un vértice de partición corriente). Como cada cara es convexa, en este caso la recta horizontal L que pasa ligeramente por encima del vértice v_i (recta «móvil») interseca el polígono M_i *por un solo segmento* (fig. 17).

Por eso

$$A_i - C_i = 1. \qquad (3.11)$$

2. El vértice v_i del polígono M sale hacia arriba (fig. 18, *a*). Es evidente que en este caso

$$A_i = C_i = 0. \qquad (3.12)$$

3. El vértice v_i del polígono M entra hacia abajo (fig. 18, *b*, *c*). En este caso la recta L interseca el polígono M_i por dos segmentos aislados (los cuales pueden degenerar en puntos). Por eso

$$A_i - C_i = 2. \qquad (3.13)$$

Precisamente las igualdades (3.11)—(3.13) dan motivo para distinguir los vértices de partición corrientes y especiales.

Vamos a pormenorizar, a fin de hallar la característica euleriana, la suma de signo variable V — A + C respecto a los vértices valiéndonos de las igualdades (3.9) y (3.10):

$$\chi(M) = V - A + C =$$
$$=(1-A_1+C_1)+(1-A_2+C_2)+\ldots+(1-A_V+C_V).$$

Partiendo de las igualdades (3.11)—(3.13), la expresión $1 - A_i + C_i$ es igual a 0 para cada vértice corriente, es igual a 1 para cada vértice que sale hacia arriba y es igual a -1 para cada vértice que entra hacia abajo. Por eso $\chi(M) = \alpha - \beta$, o bien, de acuerdo con el lema 2, $\chi(M) = 1$. El teorema 1 está demostrado.

COROLARIO. *La característica de Euler de un polígono abierto simple (es decir, que tiene suprimidos todos los vértices y aristas de frontera) es igual a* 1.

La DEMOSTRACIÓN del corolario parte del teorema 1 y el hecho de que la característica euleriana de la frontera de un polígono simple es igual a cero.

TEOREMA 2. *La característica de Euler del polígono M que tiene n huecos es igual a $1 - n$.*

A continuación se expondrá la demostración de un caso particular de dicho teorema. El caso general estará demostrado en el § 12. Introduzcamos previamente las definiciones y demostremos un lema.

Sea M de nuevo un polígono simple. Llamemos a su vértice v *saliente hacia abajo* si el ángulo interior del polígono en este vértice es menor que π y si ambos vértices adyacentes del mismo están situados por encima de v.

En la fig. 12 tales son los vértices v_1 y v_6. Llamemos al vértice w *entrante hacia arriba* si el ángulo interior del polígono en dicho vértice es mayor que π y si ambos vértices adyacentes están situados por debajo de éste. En la fig. 12 tal es el vértice v_7. Designemos por γ el número de vértices de un polígono simple que sale hacia abajo y por δ, el número de sus vértices que entran hacia arriba.

LEMA 3. *Para cada polígono simple, todos los vértices del cual se encuentran a diferente altura, es justa la igualdad siguiente*:

$$\gamma - \delta = 1. \tag{3.14}$$

DEMOSTRACIÓN. Se podría demostrar la igualdad (3.14) casi de la misma manera que la (3.1) *), pero es mucho más simple deducir (3.14) a partir de (3.1), lo cual precisamente hemos de hacer. Supongamos que un punto se mueve por el contorno del polígono en cierto sentido determinado, comenzando el movimiento en el vértice más bajo v, y supongamos también que recorre de una vez todo el contorno y retorna al vértice, subiendo y bajando varias veces. Está claro que el número de tramos de elevación es igual al de los de bajada. Por otro lado cada elevación comienza en un vértice que sale o entra hacia abajo, y cada bajada, en el vértice que sale o entra hacia arriba. Por eso el número de tramos de elevación es igual a $\gamma + \beta$, mientras que el de tramos de bajada, a $\delta + \alpha$. Quiere decir esto que $\gamma + \beta = \delta + \alpha$, lo cual junto con (3.1) da (3.14). El lema 3 está demostrado.

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 2. Supondremos que la frontera de cada hueco no tiene puntos comunes con el contorno exterior del polígono M ni con las fronteras de otros huecos. Vamos a numerar todos los vértices de partición, al igual que en la demostración del teorema 1, en orden de crecimiento de su altura, y pormenoricemos la expresión para la característica de Euler $\chi(M) = V - A + C$ respecto a los vértices:

$$V - A + C = (1 - A_1 + C_1) + \dots$$
$$\dots + (1 - A_V + C_V). \tag{3.15}$$

---

*) Puede notarse que si cambian las nociones de «arriba» y «abajo», todos los vértices salientes hacia arriba se convierten en salientes hacia abajo, etc. Así la demostración de la igualdad (3.14) se obtiene directamente del lema 2.

Al igual que antes, se comprueban con facilidad los dos hechos siguientes: primero, si el vértice de partición v_i es un punto interior del polígono M, el sumando que le corresponde es $1 - A_i + C_i = 0$; segundo, la suma de todos los sumandos del segundo miembro de la igualdad (3.15) que corresponden a los vértices de partición que se encuentran en el contorno exterior del polígono M es igual a 1.

Consideremos ahora algún hueco C y todos los vértices de partición que se encuentran en su frontera. Como se ha dicho, el hueco C junto con su frontera es un polígono simple. Sea que el punto v_i considerado como vértice del polígono C sale hacia abajo. Entonces, siendo vértice del polígono M, dicho punto *entra* hacia abajo. Por eso, como hemos visto en la demostración del teorema 1, $1 - A_i + C_i = -1$. Si el vértice v_i del polígono C entra hacia arriba, entonces, siendo vértice del polígono M, *sale* hacia arriba, y por eso $1 - A_i + C_i = 1$. Para los demás vértices del polígono C tenemos $1 - A_i + C_i = 0$. Esto quiere decir que la suma de todos los sumandos del segundo miembro de la igualdad (3.15) que corresponden al hueco C es igual a $\delta - \gamma$, mientras que según el lema 3 $\delta - \gamma = -1$. Repitiendo este razonamiento para cada hueco por separado, tendremos la igualdad $\chi(M) = 1 - n$. Así pues, hemos demostrado un caso particular del teorema 2.

Sea la figura A la unión de un número finito de polígonos que no tienen puntos comunes de dos en dos. Dichos polígonos se denominan *componentes* de la figura A; designemos su número por $c(A)$. Luego, sea $c^*(A)$ el número de *componentes de complemento de la figura A hasta el plano*. Uno de dichos componentes es ilimitado; los demás son huecos que pertenecen a uno u otro polígono. A partir del teorema 2 se obtiene directamente el siguiente

COROLARIO. *La característica euleriana de la figura A es igual a*

$$\chi(A) = c(A) - c^*(A) + 1. \tag{3.16}$$

PROBLEMA

10. Demuéstrese que la suma $V + A + C + n$ es impar para cualquier partición del polígono que tiene n huecos.

§ 4. CARACTERÍSTICA DE EULER Y SUMA DE LOS ÁNGULOS EXTERIORES DE UN POLÍGONO

En el presente párrafo se mostrará que la característica euleriana de un polígono se expresa de una manera muy simple, a través de la suma de sus ángulos exteriores.

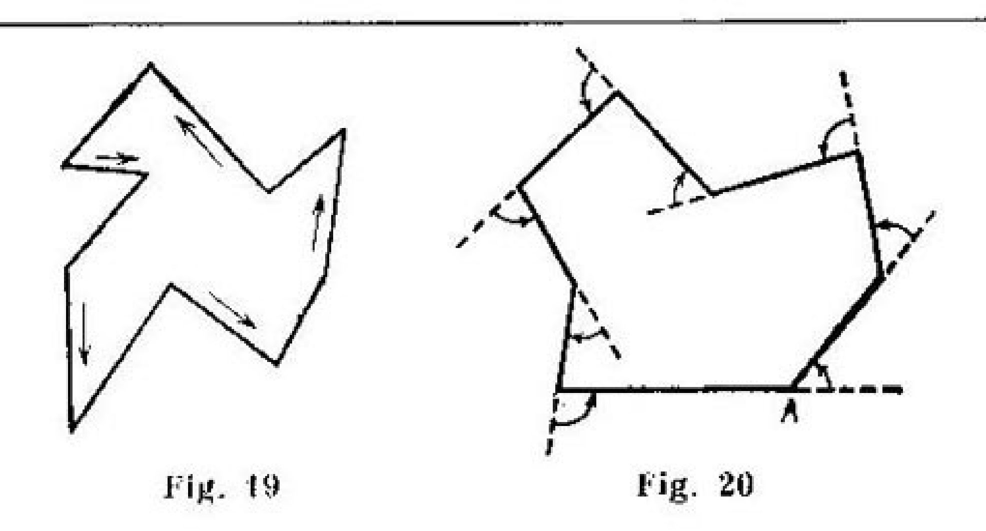


Fig. 19 Fig. 20

Con esto se dará, en particular, una demostración distinta del teorema 1. Al igual que antes, comencemos por el caso de los polígonos simples.

Sea M un polígono simple. *Orientarlo* significa indicar cuál de los dos sentidos posibles de recorrido de su contorno se considera positivo. Corrientemente es el sentido del recorrido, para el cual los puntos interiores del polígono quedan a la izquierda (fig. 19). Entonces el sentido opuesto será negativo. Puede decirse además que el recorrido del contorno en sentido positivo es el movimiento por este contorno en dirección contraria a la de las manecillas del reloj. Esto está relacionado con el acuerdo antes mencionado sobre el sentido positivo de conteo de los ángulos.

Sea M un polígono simple orientado, y supongamos que nos movemos por su contorno en sentido positivo. Llámase *ángulo exterior* del polígono en su vértice A el ángulo entre la prolongación (en sentido positivo) del lado de éste que además termina en el punto A, y el lado del polígono que comienza en este punto (fig. 20). Es natural considerar el ángulo exterior como medida de giro del contorno en el punto A al recorrerlo en sentido positivo.

Si, por ejemplo, el ángulo interior en el vértice A se aproxima a π, el ángulo exterior se aproxima a 0 y el contorno gira poco. En general, es fácil comprobar que entre el ángulo interior φ del polígono en su vértice A y el ángulo exterior ψ en el mismo vértice existe la relación

$$\varphi + \psi = \pi \qquad (4.1)$$

(tomando en consideración el signo del ángulo ψ). Notemos que los ángulos interiores del polígono siempre se consideran positivos. De la fórmula (4.1) se desprende, en particular, que el ángulo exterior del polígono es positivo si, y sólo si el ángulo interior que le corresponde es menor que π.

LEMA 4. *Sea M un polígono simple que tiene n lados. Entonces la suma Φ de todos sus ángulos interiores es igual a $(n-2)\pi$, y la suma Ψ de todos sus ángulos exteriores es igual a 2π independientemente del número de lados.*

El lector conoce, naturalmente, el caso particular de este lema que concierne a los polígonos convexos.

Demostremos la primera afirmación del lema por inducción respecto al número de lados del polígono. Ésta es conocida para los triángulos. Admitiéndola correcta para todos los polígonos con un número de lados menor que n, demostrémosla para un polígono con n lados. Tracemos en el polígono M una diagonal que lo divide en dos polígonos simples M_1 y M_2 (véase la demostración del lema 2). Sean Φ_1 y n_1 la suma de los ángulos interiores y el número de lados del polígono M_1; Φ_2 y n_2, los mismos valores para el polígono M_2. Según la suposición de la inducción tenemos $\Phi_1 = (n_1 - 2)\pi$, $\Phi_2 = (n_2 - 2)\pi$. Además, es evidente que $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$ y $n_1 + n_2 = n + 2$. Por eso

$$\Phi = (n_1-2)\pi + (n_2-2)\pi = (n_1+n_2-4)\pi = (n-2)\pi,$$

demostrando con esto la primera afirmación del lema.

Sea φ_i el ángulo interior del polígono y ψ_i, el ángulo exterior que le corresponde, $i = 1, \ldots, n$, entonces $\varphi_i + \psi_i = \pi$. Por eso

$$\Psi = \sum_{i=1}^{n} \psi_i = \sum_{i=1}^{n} (\pi - \varphi_i) = n\pi - \sum_{i=1}^{n} \varphi_i = n\pi - n\pi + 2\pi = 2\pi$$

El lema 4 está demostrado.

Demostremos ahora la *fórmula*

$$\Psi = 2\pi (V - A + C) \qquad (4.2)$$

que enlaza la suma de los ángulos exteriores de un polígono simple con su característica de Euler. Aquí utilizamos las designaciones del lema 4.

DEMOSTRACIÓN. Sea M un polígono simple partido en caras; α, cualquier ángulo interior de una cara arbitraria; $\sum\alpha$, la suma de todos los ángulos de este tipo. Entonces $\sum\alpha = \sum_1\alpha + \sum_2\alpha$, donde $\sum_1$ designa la suma de todos los ángulos α, cuyos vértices se encuentran en la frontera del polígono M, y $\sum_2$, la suma de los demás vértices, es decir, aquellos, cuyos vértices están dentro de M.

Sea V_1 el número de vértices de partición que se encuentran en la frontera de M, y V_2, el número de vértices de partición interiores. En este caso $V = V_1 + V_2$. La suma de los ángulos α alrededor de cada vértice interior es igual a 2π, siendo por eso $\sum_2 = 2V_2\pi$. A partir de aquí, tomando en consideración la igualdad (4.1), obtendremos la expresión siguiente para la suma de los ángulos exteriores del polígono M:

$$\begin{aligned}\Psi = \sum_{i=1}^{V_1} \psi_i = \sum_{i=1}^{V_1} (\pi - \varphi_i) = V_1\pi - \sum_{i=1}^{V_1} \varphi_i = \\ = V_1\pi - \sum{}_1\alpha = V_1\pi - \sum \alpha + \sum{}_2\alpha = \\ = (V_1 + 2V_2) - \sum \alpha. \qquad (4.3)\end{aligned}$$

Sea m el número de lados (o ángulos) de la cara, para la cual este número es máximo. Según el lema 4

$$\sum\alpha \, [C_3 + 2C_4 + \ldots + (m-2)C_m] \, \pi, \qquad (4.4)$$

siendo C_3 el número de caras triangulares; C_4, el número de caras cuadrangulares; ... C_m, el número de caras m-angulares. A partir de (4.3) y (4.4) se desprende que

$$\Psi = [V_1 + 2V_2 - C_3 - 2C_4 - \ldots - (m-2)C_m] \, \pi. \qquad (4.5)$$

Sea A_1 el número de aristas de partición que se encuentran en la frontera del polígono M, y A_2, el número de aristas interiores; entonces $A = A_1 + A_2$. Dado que cada arista interior pertenece a dos caras, y cada arista de frontera a una, entones sumando las aristas de todas las

caras, tendremos

$$3C_3 + 4C_4 + \dots + mC_m = A_1 + 2A_2. \qquad (4.6)$$

De la igualdad evidente

$$C = C_3 + C_4 + \dots + C_m$$

se desprende que

$$C_3 + 2C_4 + \dots + (m-2)\,C_m =$$
$$= (3C_3+4C_4 + \dots + mC_m) - 2(C_3 + C_4 + \dots + C_m) =$$
$$= (3C_3 + 4C_4 + \dots + mC_m) - 2C. \qquad (4.7$$

A partir de las igualdades (4.5), (4.7), (4.6), $V_1 = A'$ y $A = A_1 + A_2$, obtenemos

$$\Psi = [V_1 + 2V_2 - A_1 - 2A_2 + 2C + V_1 - A_1]\,\pi$$

o bien

$$\Psi = 2\pi\,(V - A + C), \qquad (4.2)$$

lo que precisamente era necesario demostrar.

Está claro que de la fórmula (4.2) y del lema 4 se desprende de nuevo la afirmación del teorema 1.

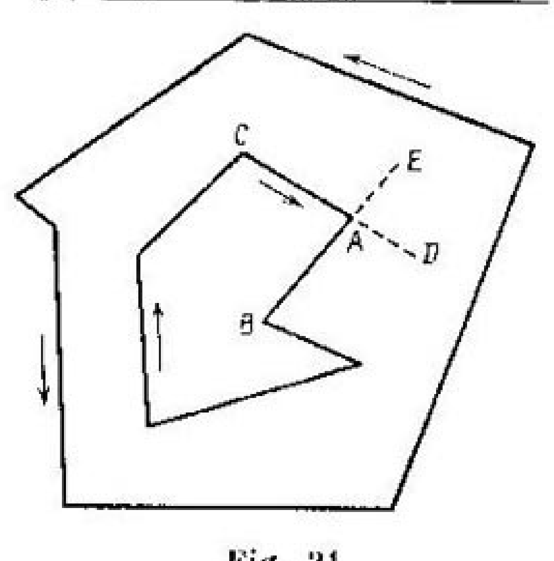


Fig. 21

Sea ahora M un polígono con huecos. Vamos a considerar, para simplificar, que la frontera de cada hueco que representa un contorno no tiene puntos comunes con las fronteras de otros huecos ni con el contorno exterior del polígono M. La orientación de éste se da igualmente que antes, es decir, se considera positivo el sentido de recorrido de su frontera, para el cual los puntos interiores de M se quedan a la izquierda. Quiere decir esto que el contorno exterior se recorre en dirección contraria a la de las manecillas del reloj, mientras que la frontera de cada hueco, siguiendo el sentido de las manecillas de reloj (fig. 21). Se conserva también la determinación del ángulo exterior. Se comprueba con facilidad el hecho siguiente. Si A es el vértice del polígono M que se encuentra en la fron-

tera del hueco F; ψ, el ángulo exterior de M en el punto A; ω, el ángulo exterior del polígono simple F en el mismo punto, entonces $\psi = -\omega$. Por ejemplo, en la fig. 21 DAB es el ángulo exterior del polígono M en el punto A, y EAC, el del polígono F. Dichos ángulos son iguales en valor absoluto como verticales. Está claro también que son de signos opuestos. Por tanto, la suma de los ángulos exteriores de un polígono, tomada por todos los vértices de alguno de sus huecos, es igual a -2π. Esto quiere decir que para el polígono M con n huecos se cumple la igualdad $\Psi = 2\pi(1 - n)$ también por el teorema $2\Psi = 2\pi\chi(M)$. Se podría demostrar la última igualdad independientemente del teorema 2.

PROBLEMAS

11. Supongamos que un pentágono simple está partido en caras poligonales convexas de tal modo que cada lado del pentágono es a la vez el de alguna cara. Demuéstrese que si el número de caras es no menor de 5, entonces por lo menos en una de ellas hay un ángulo $\geqslant 2\pi/5$.

12. Supongamos que un polígono simple M está dividido en polígonos simples $M_1, \ldots, M_n$ de tal manera que cada dos polígonos M_i y M_j no tienen, en absoluto, puntos comunes o su intersección consta de una quebrada simple no cerrada que se encuentra en la frontera de cada uno de ellos. Dichas quebradas pueden degenerar, es decir, ser puntos. Llamemos a los polígonos $M_1, \ldots, M_n$ *caras de partición de M*. Llamemos *vértice de partición interior* al punto interior del polígono M, que pertenece a tres caras (o a un número mayor de éstas). Llamemos *vértice de partición de frontera* al punto de la frontera de M, que pertenece a dos caras (o a un número mayor de éstas). Vamos a llamar *aristas de partición* a las quebradas simples no cerradas que se encuentran en las fronteras de las caras uniendo los vértices de partición. Demuéstrese, valiéndose de los razonamientos utilizados en la demostración de la fórmula (4.2), que para tal comprensión de la partición es justa la igualdad $\chi(M) = V - A + C = 1$.

13. Demuéstrese, utilizando el resultado del problema 12, que un grafo completo con cinco vértices no encaja en el plano.

§ 5. APLICACIÓN DE LA CARACTERÍSTICA DE EULER AL CÁLCULO DE ÁREAS

Supongamos que en el plano están trazadas unas rectas horizontales de tal manera que la distancia entre cada par de rectas vecinas es igual a 1; las rectas verticales están

trazadas con la misma condición (fig. 22). Tales rectas dividen el plano en cuadrados de lado igual a 1 y que tienen, por tanto, un área unitaria.

El conjunto de vértices de todos los cuadrados se denomina *retículo puntual*, y los propios vértices de los cuadrados, *nudos* de dicho *retículo*.

Aplicaremos la característica de Euler al cálculo de las áreas de los polígonos, todos los vértices de los cuales se

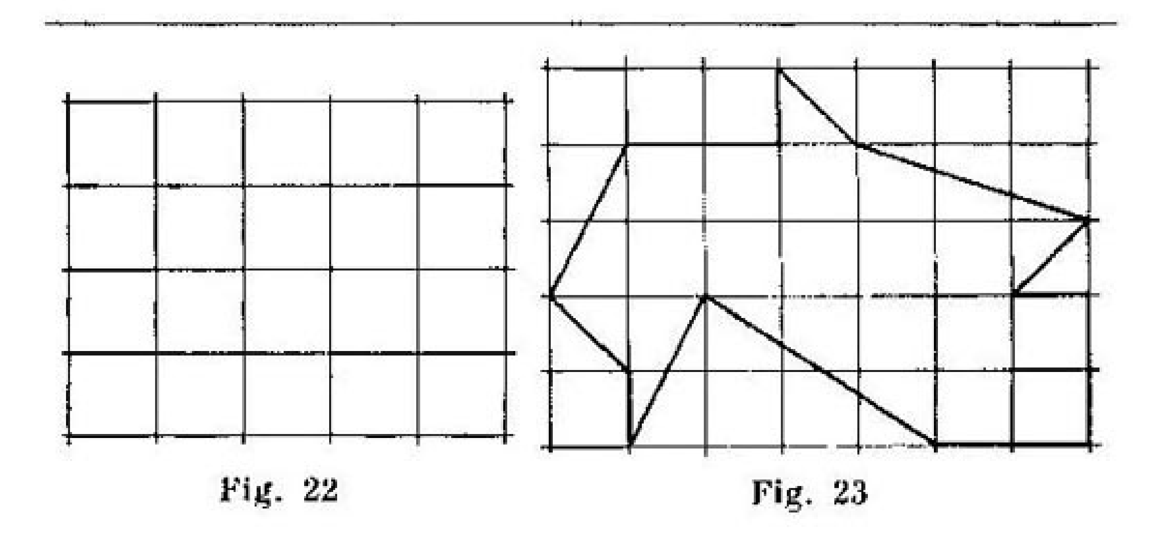


Fig. 22 Fig. 23

encuentran en los nudos del retículo. Convengamos en llamar *reticulares* a tales polígonos. En dicho párrafo se examinan solamente los polígonos reticulares.

Si M es un polígono reticular simple, entonces para su área S (M) resulta justa la fórmula siguiente:

$$S(M) = i + \frac{b}{2} - 1, \qquad (5.1)$$

donde i es el número de nudos que se encuentran dentro del polígono M; b, el número de nudos que contiene su frontera. Por ejemplo, para el polígono M (fig. 23) tenemos $i = 13$, $b = 16$, siendo por eso $S(M) = 13 + \frac{16}{2} - 1 = 20$. Por tanto, el cálculo del área se reduce en este caso al cálculo de los nudos del retículo de dos tipos diferentes. La fórmula (5.1) fue obtenida en 1899 por el matemático austriaco G. Pick (1859—h. 1943).

La DEMOSTRACIÓN de la fórmula de Pick será realizada en tres etapas.

1. Llamemos *primitivo* a un triángulo reticular si dentro de éste y en sus lados no hay nudos del retículo;

ejemplos de tales triángulos pueden verse en la fig. 24. La primera etapa de la demostración consiste en comprobar el hecho de que el área de cualquier triángulo primitivo $\triangle$ es igual a 1/2:

$$S(\triangle)=1/2. \qquad (5.2)$$

Sea ABC un triángulo primitivo (fig. 25), $S(ABC)$ es su área, $AGCE$, el rectángulo más pequeño con los vérti-

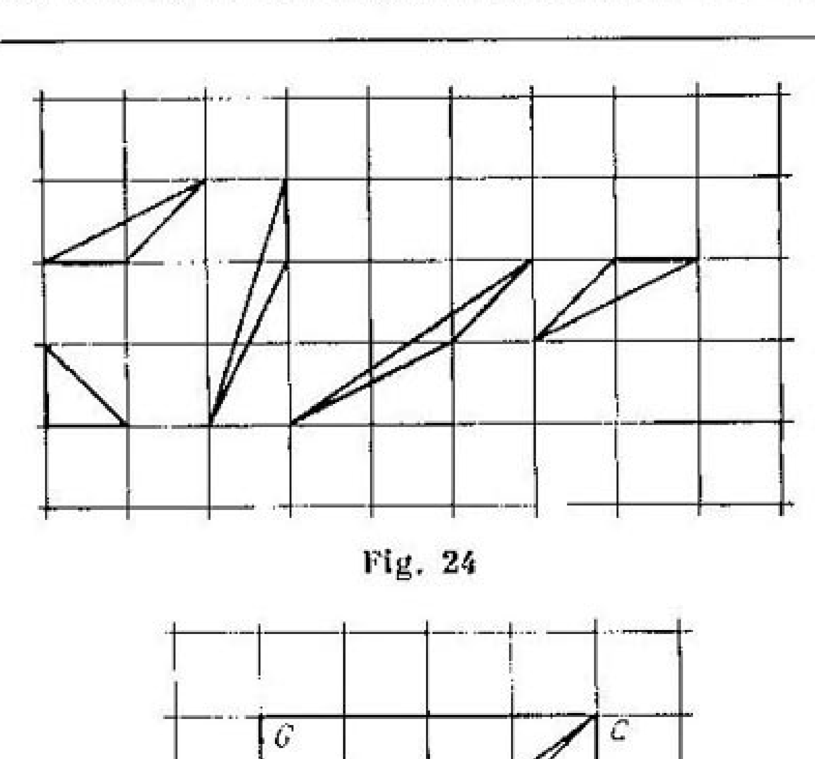


Fig. 24

Fig. 25

ces en los nudos del retículo que contiene el triángulo ABC. Sean D y F las bases de las perpendiculares bajadas desde el punto B a las rectas AE y CE, respectivamente. Introduzcamos las notaciones siguientes para las longitudes de los segmentos:

$$|AD|=p, \quad |AE|=q, \quad |EF|=r, \quad |EC|=s.$$

Es evidente que los números p, q, r y s son enteros. Hallemos las áreas de los triángulos ACE, ABD, BCF y del rectángulo $BDEF$. Tenemos lo siguiente:

$$S\,(ACE) = \frac{qs}{2}, \quad S\,(ABD) = \frac{pr}{2},$$

$$S\,(BCF) = \frac{(q-p)\,(s-r)}{2}, \quad S\,(BDEF) = (q-p)\,r.$$

De aquí

$$S\,(ABC) = \frac{qs}{2} - \frac{pr}{2} - \frac{(q-p)\,(s-r)}{2} - (q-p)\,r$$

o bien, una vez hecha la simplificación,

$$S\,(ABC) = \frac{1}{2}\,(ps - qr). \tag{5.3}$$

No hemos utilizado todavía la condición de que el triángulo ABC es primitivo. Mostremos que si dicha condición se cumple, entonces en la fórmula (5.3) $ps - qr = 1$ y, por consiguiente, la igualdad (5.2) es justa. Designemos por $N\,(M)$ el número de nudos del retículo que se encuentran *dentro* (¡pero no en la frontera!) del polígono M, y por $N\,(PQ)$, el número de nudos que están en el segmento PQ y diferentes de sus extremos. Así pues, por ejemplo, $N\,(ABC) = N\,(AB) = N\,(AC) = N\,(BC) = 0$ (fig. 25).

Hallemos primeramente el número $N\,(AGCE)$. Puesto que $|\,AE\,| = |\,GC\,| = q$, $|\,AG\,| = |\,CE\,| = s$, el rectángulo $AGCE$ contiene sólo $(q+1)\,(s+1)$ nudos. De éstos $2\,(q+1) + 2\,(s+1) - 4$ nudos se encuentran en la frontera del rectángulo, los demás, dentro de éste. Por tanto, $N\,(AGCE) = (q+1)\,(s+1) - 2\,(q+1) - 2\,(s+1) + 4 = (q-1)\,(s-1)$. Luego, como AC es la diagonal del rectángulo $AGCE$ que lo divide en dos triángulos iguales, y $N\,(AC) = 0$,

$$N\,(ACE) = \frac{1}{2}\,N\,(AGCE) = \frac{1}{2}\,(q-1)\,(s-1)$$

Análogamente,

$$N\,(ABD) = \frac{1}{2}\,(p-1)\,(r-1).$$

$$N\,(BCF) = \frac{1}{2}\,(q-p-1)\,(s-r-1).$$

$$N\,(BDEF) = (q-p-1)\,(r-1).$$

$$N\,(BD) = r-1, \quad N\,(BF) = q-p-1.$$

A partir de la figura 25 está claro que

$$N(ACE) = N(ABC) + N(ABD) + N(BCF) + \\ + N(BDEF) + N(AB) + N(BC) + N(BD) + N(BF) + 1,$$

donde la unidad en el segundo miembro corresponde al punto B. Poniendo en esta fórmula los valores hallados de los números $N(M)$ para diferentes polígonos M, tenemos lo siguiente:

$$\frac{1}{2}(q-1)(s-1) = \frac{1}{2}(p-1)(r-1) + \\ + \frac{1}{2}(q-p-1)(s-r-1) + \\ + (q-p-1)(r-1) + (r-1) + (q-p-1) + 1.$$

Después de la simplificación tenemos $ps - qr = 1$, lo cual demuestra la fórmula (5.2).

2. Sea M un polígono reticular simple. Mostremos que éste puede ser dividido en triángulos primitivos. Puesto que el polígono siempre se supone dado en forma de partición en polígonos convexos, mientras que cada polígono reticular convexo se parte en triángulos reticulares, resta mostrar que cada triángulo reticular puede dividirse en otros primitivos. Supongamos que dentro de $\triangle$ o en su frontera hay nudos del retículo. Unamos algún nudo interior a todos los vértices del triángulo $\triangle$ o algún nudo que está en un lado de $\triangle$, a su vértice opuesto. Entonces se obtiene la partición de $\triangle$ en dos o tres triángulos, cada uno de los cuales tiene dentro de sí y en sus lados menos nudos que $\triangle$. Luego apliquemos la misma construcción a los triángulos obtenidos que no son primitivos. Está claro que después de un número finito de pasos llegaremos a la partición de $\triangle$ en triángulos primitivos.

3. Mostremos que para cualquier partición de un polígono reticular simple M en triángulos primitivos el número de éstos es igual a $2i + b - 2$, siendo i el número de nudos interiores; b, el número de nudos de frontera del retículo. A partir de aquí y de la igualdad (5.2) se obtiene la fórmula de Pick. Sean V, A y C los números de vértices, aristas y caras (triangulares) de partición. Dado que los vértices de partición coinciden con los nudos que se encuentran en M, $V = i + b$. Además, se cumplen las igualdades $A = A_i + A_b$, donde A_i es el número de aristas de partición interiores; A_b, el número de aristas

de partición de frontera, así como

$$A_b = b \tag{5.4}$$

y

$$3C = 2A_i + A_b. \tag{5.5}$$

La igualdad (5.5) se obtiene sumando las aristas respecto a todas las caras (triangulares) considerando que cada arista de frontera pertenece a una cara, y cada arista interior, exactamente a dos caras. Ahora la igualdad (5.5) puede transformarse así:

$$3C = 2\,(A - A_b) + A_b = 2\,(A - b) + b,$$

de donde se desprende que $A = \frac{1}{2}\,(3C + b)$. Sustituyendo los valores hallados de V y A en la fórmula de Euler

$$V - A + C = 1 \tag{5.6}$$

tendremos $i + b - \frac{1}{2}\,(3C + b) + C = 1$ o bien $C = 2i + b - 2$, lo cual precisamente era necesario. La fórmula de Pick (5.1) está demostrada.

Si se vale de la noción de «peso» del punto con respecto al polígono, la fórmula (5.1) puede escribirse en otra forma, quizá más cómoda para recordarla. Consideremos algún punto en el plano y un círculo de radio muy pequeño con el centro en dicho punto. Llamemos *peso* la razón del área de la parte del círculo que se encuentra dentro del polígono, al área de todo el círculo. Si el punto se encuentra dentro del polígono (como, por ejemplo, los puntos A y B en la fig. 9, p. 21), entonces el pequeño círculo se encuentra por entero dentro del polígono; por eso el peso de tal punto es igual a 1. Si el punto se encuentra en un lado del polígono y difiere de sus vértices (por ejemplo, el punto D en la fig. 9), su peso es igual a 1/2. Por fin, como es fácil ver, el vértice del polígono tiene un peso igual al valor del ángulo interior en dicho vértice dividido por 2π. Ahora la fórmula de Pick puede expresarse así: *el área de un polígono reticular simple es igual a la suma de los pesos de todos los nudos del retículo incluidos en éste.*

Dado que el número i en la fórmula (5.1) no es sino la suma de los pesos de los nudos interiores del retículo, basta con demostrar que la suma algebraica $\frac{b}{2} - 1$ es igual a la suma de los pesos de todos los nudos de límite.

Sea b_1 el número de vértices del polígono, y b_2, el número de los demás nudos de límite. Entonces

$$\frac{b}{2}-1=\frac{b_1}{2}-1+\frac{b_2}{2}.$$

Está claro que la expresión

$$\frac{b_1}{2}-1=\frac{(b_1-2)\pi}{2\pi}$$

es igual, en vista del lema 4, a la suma de los pesos de todos los vértices del polígono, mientras que $\frac{b^2}{2}$ es la suma de los pesos de los demás nudos de límite, lo que demuestra nuestra afirmación.

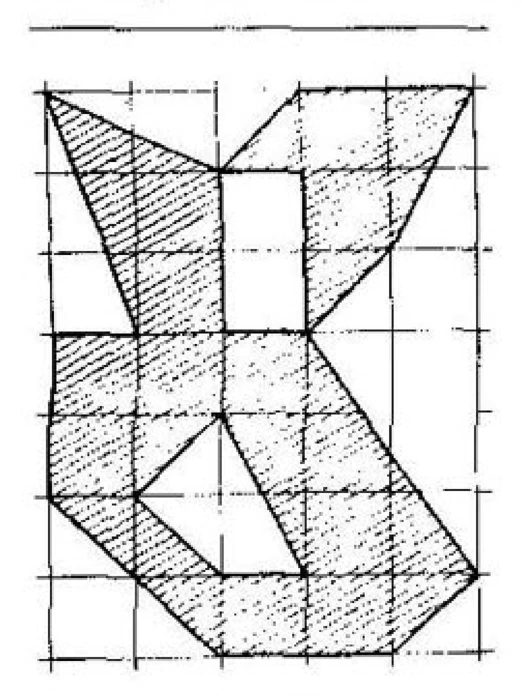


Fig. 26

Es de interés señalar que existe un análogo de la fórmula de Pick (5.1) para los polígonos reticulares con huecos (fig. 26). Su aspecto es el siguiente:

$$S(M)=i+\frac{b}{2}-\chi(M)+ \\ +\frac{1}{2}\chi(\partial M), \qquad (5.7)$$

donde ∂M es la frontera del polígono M. Está claro que la fórmula (5.7) generaliza la fórmula (5.1), puesto que para un polígono simple

$$\chi(M)=1 \quad \text{y} \quad \chi(\partial M)=0.$$

La demostración de la fórmula (5.7) se realiza de la misma manera que la de la (5.1) diferenciándose de ella sólo al final. Precisamente, en vez de la igualdad (5.4) tenemos ahora, de acuerdo con la determinación de la característica euleriana de la frontera,

$$b-A_b=\chi(\partial M), \qquad (5.8)$$

y en vez de (5.6),

$$V-A+C=\chi(M). \qquad (5.9)$$

Por eso la igualdad (5.5) una vez hecha la transformación considerando (5.8), obtiene la forma siguiente:

$$3C=2A-b+\chi(\partial M)$$

o bien

$$A=\frac{1}{2}[3C+b-\chi(\partial M)].$$

Sustituyendo en la igualdad (5.9) el valor hallado de A, así como $V = i + b$, tenemos

$$i+b-\frac{1}{2}[3C+b-\chi(\partial M)]+C=\chi(M).$$

A partir de aquí deducimos el número C:

$$C = 2i + b - 2\chi(M) + \chi(\partial M).$$

Dado que todas las caras de partición son triángulos primitivos cuyas áreas son iguales a 1/2, la fórmula (5.7) queda demostrada.

Sobre otros análogos de la fórmula de Pick en el plano y en el espacio véase el interesante artículo [3].

PROBLEMAS

14. Demuéstrese que para el área $S(M)$ de un polígono reticular simple M es justa la igualdad

$$S(M)\geqslant G-\frac{L}{2}-1. \tag{5.10}$$

Aquí G designa el número total de nudos del retículo que se encuentran en M (es decir, $G = i + b$); L, el perímetro del polígono, es decir, la longitud de su frontera. Además, si el polígono está partido en cuadrados unitarios con vértices en los nudos del retículo, la desigualdad (5.10) se convierte en igualdad.

15. Supongamos que en el plano está el retículo puntual descrito anteriormente (llamémoslo retículo 1). Tracemos unas rectas horizontales y verticales complementarias de manera que se obtenga la partición del plano en cuadrados cuyo lado es $\frac{1}{2}$. Llamemos a los vértices de dichos cuadrados nudos del retículo $\frac{1}{2}$. Sea M un polígono (simple o con huecos), cuyos vértices están en los nudos del retículo $\frac{1}{2}$. Sean también i_2 y b_2 los números de nudos de este retículo que se encuentran dentro y en la frontera del polígono, respectivamente (designemos los números análogos para el retículo 1 por i_1 y b_1). Demuéstrese que el área del polígono es igual a

$$S(M)=\frac{1}{4}\left[i_2+\frac{b_2}{2}-\chi(M)+\frac{1}{2}\chi(\partial M)\right].$$

Pero si los vértices del polígono están en los nudos del retículo 1 $\left(\text{y por eso también en los nudos de retículo } \frac{1}{2}\right)$, entonces

$$S(M)=\frac{1}{3}\left[(i_2-i_1)+\frac{1}{2}(b_2-b_1)\right],$$

es decir, los términos que contienen la característica de Euler se suprimen

§ 6. FÓRMULA DE EULER PARA EL ESPACIO

Estudiemos la característica euleriana de las figuras tridimensionales. Al partir tal figura aparecen no sólo vértices, aristas y caras, sino también células tridimensionales (*tridimensionalidad* de una célula quiere decir que ella contiene por entero cierta esfera o bien, lo que es lo mismo, no yace en ningún plano). Ahora es natural llamar característica de Euler de la figura Φ al número

$$\chi(\Phi)=V-A+C-K,$$

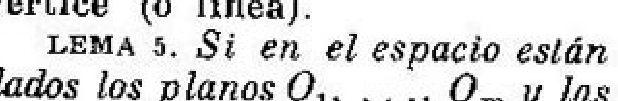
donde K es el número de sus células tridimensionales.

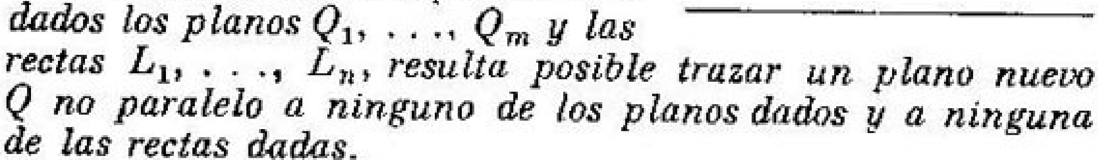
Comencemos por calcular la característica de Euler del propio espacio (tridimensional) R. Sea que en el espacio existe una familia finita de planos $Q_1, \ldots, Q_n$. Dichos planos parten el espacio en un conjunto finito de células tridimensionales; designemos su número con la letra K. Sea Q_i cierto plano de la familia. Su intersección con los demás planos da en Q_i un conjunto finito de rectas, que, por consiguiente, forman la partición de dicho plano. Llamemos a los vértices, aristas y caras de partición de todos los planos dados, respectivamente, vértices, aristas y caras de partición del espacio. Puede suceder que la partición no tenga vértices ni aristas; es fácil ver que esto tiene lugar si, y sólo si, todos los planos de la familia son paralelos entre sí; en este caso es natural considerar como caras de partición a los propios planos. Luego, no es difícil mostrar que la partición no tiene vértices si, y sólo si, todos los planos dados son paralelos a cierta recta L del espacio (fig. 27) (¡compruébese esto!). Sea Q un plano perpendicular a la recta L. Entonces los números de células tridimensionales, aristas y caras de la división examinada del espacio son iguales respectiva-

mente a los números de caras, aristas y vértices de partición del plano Q obtenido por intersección de Q con los planos de la familia. De aquí se desprende que en este caso particular tenemos $V - A + C - K = -1$. Resulta que dicha igualdad se cumple siempre, es decir, la característica euleriana del espacio es igual a -1 (véase (6.1)).

Fig. 27

Llamemos *líneas de partición* a las intersecciones rectas de los planos de la familia dada. Para el cálculo de la característica de Euler necesitaremos de la noción de *grado* del vértice (así como de la línea) de partición. Se determinan con absoluta analogía, es decir, como un número de planos de la familia que pasan por dicho vértice (o línea).





LEMA 5. *Si en el espacio están dados los planos $Q_1, \ldots, Q_m$ y las rectas $L_1, \ldots, L_n$, resulta posible trazar un plano nuevo Q no paralelo a ninguno de los planos dados y a ninguna de las rectas dadas.*

DEMOSTRACIÓN. Tomemos algún punto O en el plano Q_1 y tracemos por éste los planos $Q'_2 \parallel Q_2, \ldots, Q'_m \parallel Q_m$ y las rectas $L'_1 \parallel L_1, \ldots, L'_n \parallel L_n$. Sea φ_i el ángulo entre los planos Q_1 y Q'_i $(i = 2, \ldots, m)$ y ψ_j, el ángulo entre el plano Q_1 y la recta L'_j $(j = 1, \ldots, n)$. Como de costumbre, como medida del ángulo comprendido entre dos planos se toma el valor del ángulo lineal respectivo, considerando que $0 \leqslant \varphi_i \leqslant \frac{\pi}{2}$ y $0 \leqslant \psi_j \leqslant \frac{\pi}{2}$ para todos i y j. Si todos los ángulos $\varphi_2, \ldots, \varphi_m, \psi_1, \ldots, \psi_n$ son iguales a cero, cualquier plano no paralelo a Q_1 será el buscado. En caso contrario elijamos entre dichos ángulos el mínimo positivo; por ejemplo, ψ_1. Tracemos en el plano Q_1 por el punto O la recta L diferente tanto de todas las rectas $L'_1, \ldots, L'_n$ como también de las líneas de intersección del plano Q_1 con cada uno de los planos $Q'_2, \ldots, Q'_m$ (véase la demostración del lema 1). Tracemos por la recta L el plano Q que forma con el plano Q_1 un ángulo positivo menor que ψ_1. Está claro que Q no coincide con ninguno de los planos $Q'_2, \ldots, Q'_m$ y no contiene

ninguna de las rectas $L'_1, \ldots, L'_n$, y por eso es el buscado. El lema queda demostrado.

Demostremos la fórmula de Euler para el espacio R, es decir, comprobemos que para su partición cualquiera por un número finito n de planos se cumple la igualdad

$$\chi(R) = \mathrm{V} - \mathrm{A} + \mathrm{C} - \mathrm{K} = -1. \qquad (6.1)$$

Vamos a considerar que la partición en cuestión $\mathcal{D}_R$ tiene vértices y, por consiguiente, tiene aristas; al lector se le ofrece demostrar la fórmula (6.1) para el caso cuando no hay vértices.

Demostremos la fórmula (6.1) por el método del plano en movimiento. Para construirlo, tracemos primeramente unas rectas complementarias por cada par de vértices que no están en una línea de partición. Por ejemplo, si la partición del espacio se realiza por seis planos obtenidos prolongando todas las caras de un cubo, se necesitará trazar sólo 16 rectas complementarias, a saber: por los 4 pares de vértices opuestos del propio cubo y por cada par de vértices opuestos de cada cara. Valiéndonos del lema 5, tracemos el plano Q no paralelo a ninguno de los planos dados, ni a ninguna línea de partición, ni a ninguna recta complementaria. Precisamente Q será el plano móvil. Haremos dos suposiciones con respecto a éste: primero, vamos a considerar que es horizontal (esto puede lograrse haciendo girar de manera debida todo el espacio); segundo, está situado en su posición inicial por debajo de todos los vértices. De la primera suposición se desprende, en particular, que todos los vértices de división yacen en el espacio a diferente altura; vamos a numerarlos en orden de crecimiento de la altura, es decir, sea v_1 el vértice más bajo, v_2, el siguiente en altura y, finalmente, v_{V}, el más alto.

Con el fin de demostrar la igualdad (6.1) se puede, por ejemplo, expresar los números A, C y K a través de V y n. En este caso, análogamente a la demostración de la fórmula (1.2), se necesitará de nuevo una información complementaria, y hasta mucho más grande que para el caso plano: se tendrán que considerar los grados de todos los vértices, el número total m de líneas de partición y sus grados, así como el número de líneas de partición que pasan por cada vértice. Realicemos esta demostración, con el fin de simplificar, sólo para el caso particular, cuando el grado de cada vértice es igual a 3 y del de cada

línea de partición es igual a 2. Además, el razonamiento expuesto más abajo sirve también para el caso general (lo que se utilizará más adelante), y la diferencia entre los casos particular y general se manifiesta sólo en las fórmulas de V, C y K.

Veamos el plano móvil Q en su posición inicial. Al intersecar Q por los planos de la familia, en éste primero se forma una familia de n rectas que constituyen la partición $\mathscr{D}_Q$ del plano Q. A cada línea de la partición $\mathscr{D}_R$ del espacio le corresponde su propio vértice de la partición $\mathscr{D}_Q$ del plano, es decir, el punto de intersección de dicha línea con Q. Análogamente, a las caras y células tridimensionales de la partición $\mathscr{D}_R$ intersecadas por el plano Q les corresponden las aristas y caras de la partición $\mathscr{D}_Q$, respectivamente. Así pues, tal partición del plano Q tiene m vértices con el grado de cada uno igual a 2. De acuerdo con las fórmulas (1.3) y (1.4), la partición $\mathscr{D}_Q$ tiene $n + 2m$ aristas y $1 + n + m$ caras, respectivamente. Por eso el plano Q interseca en su posición inicial

m aristas
$n + 2m$ caras y
$1 + n + m$ células tridimensionales

de la partición $\mathscr{D}_R$.

Ahora supongamos que el plano Q sube hacia arriba quedándose constantemente horizontal. A partir de la primera suposición sobre dicho plano y del lema 5 se desprende que cada arista de la partición $\mathscr{D}_R$ (y, análogamente, cada cara y célula tridimensional de ésta), a excepción de las que se intersecan con el plano Q en su posición inicial, tiene el único vértice más bajo. De aquí se desprenden dos conclusiones. Primero, las *nuevas* células de la partición $\mathscr{D}_R$ surgen sólo en los momentos cuando el plano Q pasa por sus vértices. Segundo, el número de aristas, caras y células tridimensionales nuevas que surgen al pasar Q por el vértice v_i es igual respectivamente, al número de vértices, aristas *limitadas* y caras *limitadas* la de partición del plano Q formada por las rectas resultantes de su intersección con los planos de la familia que atraviesan el punto v_i en el momento cuando Q está un poco por encima de v_i (las nuevas células de la partición $\mathscr{D}_R$ como si «nacieran» del vértice v_i) (véase la fig. 28). Dicha partición del plano Q, a fuerza de la suposición sobre el grado de los vértices y las líneas, se efectúa

por tres rectas de posición general (véase el problema 3). Por consiguiente, surgen tres nuevas aristas, tres caras y una célula tridimensional. Así será al pasar el plano por cada vértice. Por eso

$$A = m + 3V,\ C = n + 2m + 3V,$$
$$K = 1 + n + m + V. \quad (6.2)$$

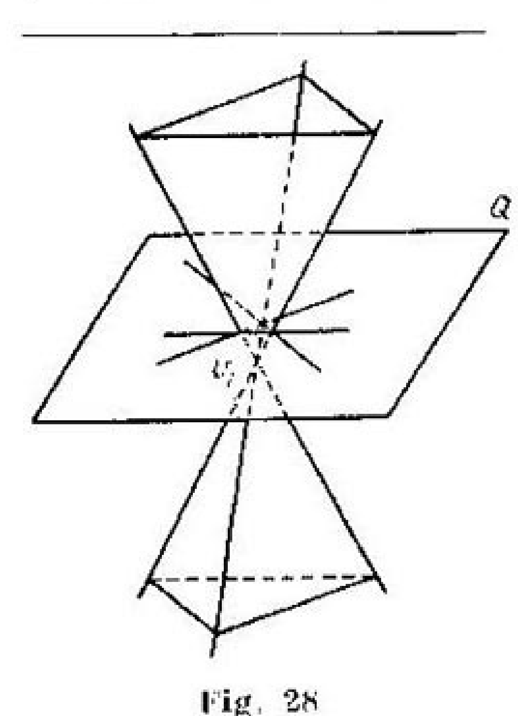


Fig. 28

De aquí se desprende que

$$\chi(R) = V - A + C - K = V - m - 3V + n + 2m + 3V - 1 - m - n - V = -1.$$

Así pues, la fórmula de Euler (6.1) está demostrada, suponiendo que cada vértice de partición tiene un grado igual a 3, y cada línea de partición lo tiene igual a 2.

Para el caso general no vamos a hallar las fórmulas que expresan A, C y K por medio de V, n y otros datos, sino que haremos uso del método ya utilizado anteriormente en el plano. Precisamente escribamos la suma de signo variable V — A + C — K respecto a los vértices, es decir, la representaremos en la forma siguiente:

$$\chi(R) = V - A + C - K = (-A_0 + C_0 - K_0) + (1 - A_1 + C_1 - K_1) + (1 - A_2 + C_2 - K_2) + \ldots + (1 - A_V + C_V - K_V), \quad (6.3)$$

donde A_0, C_0 y K_0 son los números de células de partición del espacio que encuentra el plano Q en su posición inicial; A_1, C_1 y K_1, los números de células de partición que surgen después de pasar Q por el primer vértice, etc. Como ya se ha dicho, la suma

$$S_0 = A_0 - C_0 + K_0$$

es igual a la característica de Euler del plano, mientras que cada suma

$$S_i = A_i - C_i + K_i \ (i = 1, \ldots, V)$$

es igual a la característica de Euler de la figura compuesta de las células limitadas de la partición del plano Q engendrada por las rectas resultantes de su intersección con los planos de la familia que pasan por el vértice v_i. A fuerza de la afirmación del problema 7 tenemos $S_i = 1$. Sustituyendo los valores hallados de las sumas S_i en (6.3), tenemos que $\chi(R) = -1$.

§ 7. FÓRMULA DE EULER PARA POLIEDROS CONVEXOS Y SUS COROLARIOS

Llámase *poliedro convexo* a la intersección de un número finito de semiespacios a condición de que ésta, primero, esté *limitada*, es decir, esté encerrada dentro de cierta esfera, y segundo, es *tridimensional*, es decir, contiene una otra esfera o bien, lo que es lo mismo, no yace en ningún plano. En esta definición del poliedro convexo se supone también que cada semiespacio contiene un plano que lo limita.

Todos los puntos del poliedro convexo se dividen en los interiores y los de frontera. Se dice que un punto del poliedro X es *interior* si existe una esfera con su centro en dicho punto que se encuentra por entero en X. Un punto del poliedro es *de frontera* si cualquier esfera con su centro en dicho punto contiene tanto puntos de X como también puntos de su complemento respecto al espacio. Todos los puntos de frontera constituyen la *frontera* del poliedro. Dicha frontera consta de un número finito de *caras*, las cuales son polígonos convexos. Los lados y los vértices de dichos polígonos se denominan *aristas* y *vértices* del poliedro, respectivamente.

Demostremos la famosa *fórmula de Euler*

$$\mathrm{V} - \mathrm{A} + \mathrm{C} = 2, \qquad (7.1)$$

justa para cualquier poliedro convexo.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos, como de costumbre, que todos sus vértices están a diferente altura y numerados como $v_1, v_2, \ldots, v_{\mathrm{V}}$ a fin de que cada siguiente esté por encima del anterior. Designemos por C_i $(i = 1, \ldots, \mathrm{V}-1)$ el número de caras del poliedro, para las cuales el punto v_i es el vértice más bajo o, en otras palabras, las

cuales «salen» hacia arriba del vértice v_i. Sea A_i ($i = 1, \ldots, V - 1$) el número de aristas del poliedro que tienen el vértice v_i en su extremo inferior (o «salen» de dicho vértice hacia arriba). Está claro que tales caras y aristas no existen para el vértice más alto v_V. Dado que con el vértice v_1 linda un número igual de caras y aristas, y todas éstas «salen» de dicho vértice hacia arriba, entonces

$$A_1 = C_1. \tag{7.2}$$

Cortemos ahora el poliedro X por el plano horizontal Q_i situado ligeramente por encima del vértice v_i

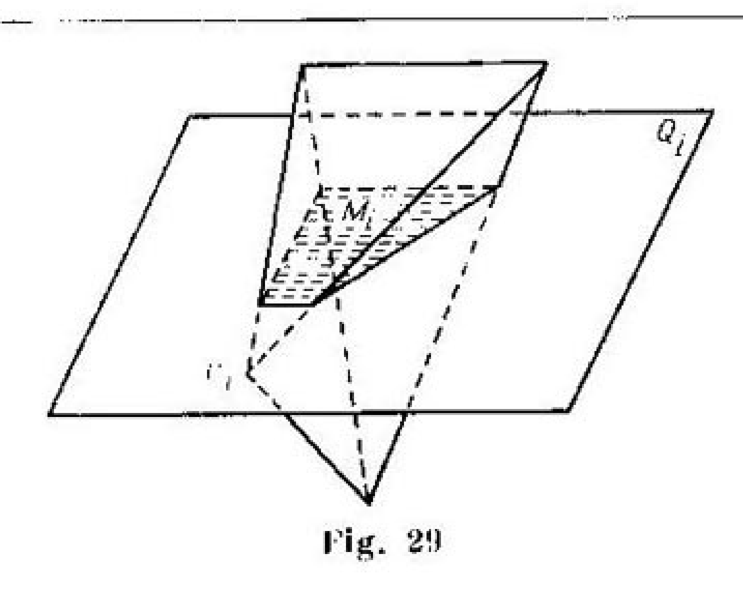


Fig. 29

($i = 1, \ldots, V - 1$). En la sección habrá un polígono convexo M_i. A cada una de las A_i aristas del poliedro que sale hacia arriba del punto v_i le corresponde su propio vértice del polígono M_i. Análogamente, a cada una de las C_i caras que salen hacia arriba desde el mismo punto le corresponde su propio lado del polígono M_i. Los vértices y lados indicados del polígono constituyen una línea quebrada simple (no cerrada que, posiblemente, conste de un solo vértice). Puesto que la característica de Euler de esta quebrada es igual a la unidad, entonces

$$A_i - C_i = 1 \quad (i = 2, \ldots, V - 1) \tag{7.3}$$

(en la fig. 29, donde está mostrado uno de los casos más simples, X es un tetraedro, la quebrada consta de un solo segmento). El número total de aristas del poliedro es $A = A_1 + \ldots + A_{V-1}$, y el número total de sus caras

es $C = C_1 + \ldots + C_{V-1}$. Por eso, valiéndonos de las igualdades (7.2) y (7.3), tendremos

$$V - A + C = V - (A_1 + \ldots + A_{V-1}) + (C_1 + \ldots$$
$$\ldots + C_{V-1}) =$$
$$= V - (A_1 + \ldots + A_{V-1}) + A_1 + (A_2 - 1) + \ldots$$
$$\ldots + (A_{V-1} - 1) = V - (A_1 + \ldots + A_{V-1}) +$$
$$+ (A_1 + \ldots + A_{V-1}) - (V - 2) = 2.$$

Así pues, la fórmula de Euler (7.1) está demostrada.

Señalemos que dicha fórmula expresa la propiedad de la *frontera* ∂X del poliedro. No obstante, el razonamiento expuesto no demuestra que la característica euleriana de la frontera sea igual a 2: pues se ha tomado en consideración sólo la partición «natural» *) de la frontera en células, mientras que para la demostración de la igualdad

$$\chi(\partial X) = 2 \tag{7.4}$$

hay que mostrar que la fórmula (7.1) es justa para cualquier partición.

Ahora, vamos a suponer que además de la natural existe alguna otra partición («nueva») de la frontera ∂X en células convexas, cuya dimensión es de 0 a 2. Vamos a seguir el segundo punto de vista sobre ambas particiones, es decir, vamos a considerar que todas las células están abiertas, y por eso las diferentes células de una partición no tienen puntos comunes. Sean v, a y c los números de vértices, aristas y caras de la nueva partición. Tenemos que demostrar la igualdad $v - a + c = 2$. Como todas las células son convexas, cada nueva célula se contiene exactamente en una vieja. Además, todas las células nuevas que constituyen una vieja forman su partición. Por eso, si F es una célula vieja abierta tridimensional, es decir, la cara del poliedro sin su frontera; v_1, a_1, c_1, los números de nuevas células de diferentes dimensiones que se contienen en F, entonces

$$v_1 - a_1 + c_1 = \chi(F) - 1. \tag{7.5}$$

Análogamente, si E es una arista abierta vieja, es decir, la arista natural del poliedro sin sus extremos; v_2 y a_2,

*) Es decir, por sus «verdaderos» vértices, aristas y caras.

los números de las células nuevas contenidas en E, entonces

$$v_2 - a_2 = \chi(E) = -1. \qquad (7.6)$$

Puesto que todas las células nuevas se encuentran en ∂X, entonces la suma $v - a + c$ puede descomponerse respecto a las células viejas, teniendo a partir de las igualdades (7.5) y (7.6):

$$\chi(\partial X) = v - a + c = V - A + C = 2.$$

Así pues, la igualdad (7.4) está demostrada.

El último razonamiento muestra, entre tanto, que la característica de Euler de la frontera de un poliedro es igual a la suma de las características de Euler de sus células abiertas. Dicha propiedad se llama *aditividad* y se examinará posteriormente en una forma más general.

Determinemos, antes de deducir los corolarios de la fórmula de Euler (7.1), ciertas correlaciones simples, pero útiles. Notemos que hasta el final de dicho párrafo por poliedro siempre se comprenderá sólo el poliedro convexo.

Llamemos *grado* del vértice de un poliedro al número de aristas que salen de aquél. Está claro que el grado de cada vértice es no menor de tres. Denotemos por V_3 el número de vértices con el grado 3, por V_4 el número de vértices con el grado 4, etc. Entonces

$$V = V_3 + V_4 + \ldots + V_m = \sum_{i=1}^{m} V_i. \qquad (7.7)$$

Aquí m es el grado máximo del vértice y $V_1 = V_2 = 0$. Frecuentemente no nos interesará el valor exacto del número m; por eso volvemos a escribir la fórmula (7.7) en forma abreviada:

$$V = V_3 + V_4 + \ldots = \sum_{i \geq 3} V_i. \qquad (7.7')$$

Cada cara del poliedro es un polígono convexo, cuyo número de lados (o de ángulos) es igual a 3 ó 4, etc. Designemos por C_i el número de caras i-angulares del poliedro ($i = 3, 4, \ldots$). En este caso

$$C = C_3 + C_4 + \ldots = \sum_{i \geq 3} C_i. \qquad (7.8)$$

Sumando las aristas respecto a todos los vértices y tomando en consideración que cada arista une dos vértices,

es decir, se cuenta dos veces, obtenemos:

$$2A = 3V_3 + 4V_4 + 5V_5 + \ldots = \sum_{i \geqslant 3} iV_i. \qquad (7.9)$$

Análogamente, sumando las aristas respecto a todas las caras y tomando en consideración que cada arista pertenece a las fronteras de dos caras y, por tanto, se cuenta dos veces, tenemos que

$$2A = 3C_3 + 4C_4 + 5C_5 + \ldots = \sum_{i \geqslant 3} iC_i. \qquad (7.10)$$

Dado que el grado de cada vértice es no menor que tres o bien, lo que es lo mismo, de cada vértice salen no menos de tres aristas, entonces

$$3C \leqslant 3V_3 + 4V_4 + 5V_5 + \ldots = \sum_{i \geqslant 3} iV_i. \qquad (7.11)$$

Como cada cara tiene no menos de tres vértices, entonces

$$3V \leqslant 3C_3 + 4C_4 + 5C_5 + \ldots = \sum_{i \geqslant 3} iC_i. \qquad (7.12)$$

Préstese atención al hecho de que el par de números V y C (así como los pares de números V_3 y C_3, V_4 y C_4, etc.) forman parte simétricamente de todas las relaciones (7.7)—(7.12), lo mismo que de la fórmula de Euler (7.1), es decir, dichas relaciones se mantienen justas si el número V en éstas se substituye por el número C, el número V_3 por el número C_3, etc. y viceversa. Por eso a cada afirmación sobre, por ejemplo, las caras del poliedro deducida de la fórmula (7.1) y las relaciones (7.7)—(7.12) le corresponde una afirmación análoga (dual) sobre sus vértices. En esto consiste el llamado *principio de dualidad*. En particular, se puede decir que, por ejemplo, las igualdades (7.9) y (7.10), así como las desigualdades (7.11) y (7.12), son duales una con respecto a otra. La fórmula de Euler es dual consigo misma.

Pasamos a la deducción de los corolarios a partir de las relaciones (7.1) y (7.7)—(7.12).

Tenemos, a partir de la igualdad (7.12) y la igualdad (7.10), que $V \leqslant \frac{1}{3} \sum_{i \geqslant 3} iC_i$ y $A = \frac{1}{2} \sum_{i \geqslant 3} iC_i$. Sustituyéndolo en (7.1) se tiene:

$$\frac{1}{3} \sum_{i \geqslant 3} iC_i - \frac{1}{2} \sum_{i \geqslant 3} iC_i + \sum_{i \geqslant 3} C_i \geqslant 2$$

o bien

$$6\sum_{i\geqslant 3} C_i - \sum_{i\geqslant 3} iC_i \geqslant 12.$$

Separemos en ambas sumas los términos que contienen C_3, C_4 y C_5. Entonces

$$6(C_3+C_4+C_5)+6\sum_{i\geqslant 6} C_i -$$

$$-(3C_3+4C_4+5C_5)-\sum_{i\geqslant 6} iC_i \geqslant 12$$

o bien

$$3C_3+2C_4+C_5 \geqslant 12+\sum_{i\geqslant 6}(i-6)\,C_i.$$

Dado que la suma que figura en el segundo miembro de dicha igualdad no es negativa, entonces

$$3C_3 + 2C_4 + C_5 \geqslant 12. \qquad (7.13)$$

La desigualdad (7.13) tiene unos corolarios geométricos interesantes. Muestra que un poliedro convexo tiene obligatoriamente las caras triangulares, cuadrangulares, o pentagonales. En particular, no existe poliedro convexo que tenga hexagonales todas sus caras. Si se supone que $C_4 = C_5 = 0$, a partir de (7.13) se tiene $C_3 \geqslant 4$, siendo estricta dicha desigualdad, es decir, existe un poliedro que tiene $C_4 = C_5 = 0$ y $C_1 = 4$, el tetraedro (pirámide triangular). Si $C_3 = C_5 = 0$, entonces $C_4 \geqslant 6$; dicha desigualdad también es estricta, como lo muestra el ejemplo del cubo. Si $C_3 = C_4 = 0$, entonces $C_5 \geqslant 12$; el carácter estricto de dicha desigualdad lo muestra el ejemplo del dodecaedro (véase la tabla 3).

La igualdad dual a la igualdad (7.13) tiene la forma siguiente:

$$3V_3 + 2V_4 + V_5 \geqslant 12. \qquad (7.14)$$

El lector por sí mismo puede demostrarla. A partir de (7.14) se obtiene, en particular, que no existe poliedro convexo cuyos vértices tengan el grado igual a 6, así como las afirmaciones siguientes:

si $V_4 = V_5 = 0$, entonces $V_3 \geqslant 4$;

si $V_3 = V_5 = 0$, entonces $V_4 \geqslant 6$;

si $V_3 = V_4 = 0$, entonces $V_5 \geqslant 12$.

Las últimas tres desigualdades son estrictas, lo que se ve en la tabla 3.

Tabla 3

Nombre del poliedro	m	n	V	A	C
Tetraedro	3	3	4	6	4
Hexaedro	4	3	8	12	6
Octaedro	3	4	6	12	8
Dodecaedro	5	3	20	30	12
Icosaedro	3	5	12	30	20

Ahora supongamos que el poliedro convexo tiene sólo caras triangulares. Entonces $C = C_3$ y la fórmula (7.10) tiene la forma $2A = 3C$. De aquí el corolario que reza:

si todas las caras de un poliedro son triángulos, entonces el número de sus caras es par. De manera dual, si todos los vértices de un poliedro tienen el grado 3, el número de sus vértices es par.

Sea, a la inversa, que el poliedro convexo no tiene ninguna cara triangular. En este caso resulta que éste tiene por lo menos 8 vértices con el grado 3. Para demostrar esta afiarmación volvamos a escribir la fórmula de Euler (7.1) en la forma siguiente:

$$4V - 2A + 4C - 2A = 8,$$

sustituyendo los términos del primer miembro de dicha igualdad por sus expresiones según las fórmulas (7.7), (7.9), (7.8) y (7.10). Entonces obtenemos

$$(4V_3 + 4V_4 + 4V_5 + \ldots) - (3V_3 + 4V_4 + 5V_5 + \\ + \ldots) + (4C_3 + 4C_4 + 4C_5 + \ldots) - (3C_3 + 4C_4 + \\ + 5C_5 + \ldots) = 8$$

o bien, una vez reducidos los términos semejantes,

$$V_3 + C_3 = 8 + (V_5 + C_5) + 2(V_6 + C_6) + \\ + 3(V_7 + C_7) + \ldots \qquad (7.15)$$

Como cada uno de los números V_i y C_i en el segundo miembro de esta igualdad bien es mayor que cero, bien es igual a cero, $V_3 + C_3 \geqslant 8$. Tenemos según el enunciado que $C_3 = 0$. Por eso $V_3 \geqslant 8$, lo que precisamente había que demostrar. De la misma igualdad (7.15) se desprende directamente la siguiente afirmación, dual a la recién demostrada; si un poliedro convexo no tiene ningún vértice con el grado 3, el número de sus caras triangulares es no menor que 8.

Un poliedro convexo se denomina *combinatoriamente regular* si todas sus caras tienen igual número de lados (digamos, m) y todos sus vértices tienen igual grado (digamos, n). Así pues, en dicha definición no se exige que las caras sean polígonos regulares iguales o que los ángulos poliedros sean iguales. En esto consiste la diferencia del poliedro combinatoriamente regular del *métricamente regular*, conocido del curso escolar de geometría. (Por supuesto, el poliedro métricamente regular es a la vez combinatoriamente regular.)

Vamos a decir que un poliedro (combinatoriamente regular tiene el *tipo* (m, n) si cada cara de éste es un m-ágono, y el grado de cada vértice es igual a n.

Demostremos que pueden existir sólo cinco tipos diferentes de poliedros combinatoriamente regulares. Ya conocemos que un poliedro regular tiene cada uno de los números m y n sólo igual a 3, 4 ó 5. De dichos números pueden hacerse nueve pares (m, n) diferentes. Nos queda por comprobar cuáles de dichos nueve pares pueden realizarse de hecho.

Así, suponiendo que tenemos un poliedro regular tipo (m, n). Entonces $C = C_m$, y en vista de (7.10) $2A = mC$. Análogamente, $V = V_n$, y en vista de (7.9) $2A = nV$. Resolviendo el sistema de ecuaciones $V - A + C = 2$, $2A = mC$, $2A = nV$ respecto a los números V, A y C tendremos:

$$V = \frac{4m}{2m+2n-mn},$$

$$A = \frac{2mn}{2m+2n-mn},$$

$$C = \frac{4n}{2m+2n-mn}.$$

Como los números son positivos, entonces

$$2m + 2n - mn > 0.$$

o bien

$$(m-2)(n-2) < 4. \qquad (7.16)$$

Ahora está claro que de los nueve pares de números (m, n) a la desigualdad (7.16) le satisfacen sólo los cinco siguientes: (3, 3), (4, 3), (3, 4), (5, 3), (3, 5). Los poliedros combinatoriamente regulares que corresponden a estos pares realmente existen: son el tetraedro (cuatro caras), el hexaedro (seis caras), el octaedro (ocho caras), el dodecaedro (doce caras), el icosaedro (veinte caras). En la tabla 3 pueden verse los valores de los números m, n, V, A y C para dichos poliedros.

Completemos dicho párrafo con la observación siguiente dirigiéndola al lector que conoce el concepto de espacio n-dimensional. Si dicho espacio contiene un poliedro convexo que no se encuentra en ningún hiperplano $(n-1)$-dimensional, su frontera se divide naturalmente en células cuyas dimensiones son de 0 a $n-1$. Sea α_i el número de células con dimensión i $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$.

Entonces existe el análogo siguiente de la fórmula la Euler (7.1):

$$\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 - \ldots + (-1)^{n-1}\alpha_{n-1} =$$
$$= 1 + (-1)^{n-1}.$$

PROBLEMAS

16. Demuéstrese que el número V + A + C es par para cualquier poliedro convexo.

17. Demuéstrese la fórmula de Euler (7.1) por el método del plano móvil sin suponer que los vértices del poliedro se encuentran a diferente altura.

18. Demuéstrese que si cada par de vértices de un poliedro convexo está unido a la arista, entonces el propio poliedro es un tetraedro.

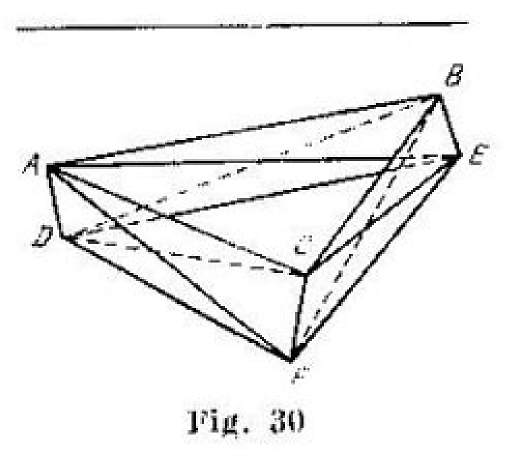


Fig. 30

Señalemos que en este problema no se puede descartar la exigencia de convexidad, como muestra el ejemplo de un cuerpo que consta de tres tetraedros *ADCF*, *ADBE* y *BECF*, de los cuales cada dos tienen una arista común (fig. 30).

Segunda observación a este problema: en el espacio multidimensional no tiene lugar una afirmación análoga. Por ejemplo, en el espacio cuadridimensional existen, además del símplice cuadridimensional (análogo del tetraedro), los poliedros convexos con un número cualquiera de vértices, no menor de cinco; cada uno de sus pares se une mediante una arista.

19. Formúlese y demuéstrese la afirmación dual a la del problema 18.

20. («Lema de Cauchy»). Sea que cada arista de un poliedro convexo está señalada con el signo más o menos. Durante el recorrido alrededor del vértice por las aristas puede haber cambios de signos (de más a menos y viceversa), estando claro que el número de estos cambios es par (posiblemente, igual a cero). Demuéstrese el lema de Cauchy: *existe tal vértice en el poliedro, recorriendo alrededor del cual el número de cambios de signos es no mayor de* 2.

Formúlese y demuéstrese la afirmación dual.

Notemos que dicho lema fue utilizado en 1813 por el matemático francés A. L. Cauchy (1789—1857) para demostrar el teorema sobre la rigidez de las fronteras de los poliedros convexos (más detalles sobre esto véanse en el libro [4]).

21. Un poliedro convexo tiene cinco aristas. ¿Cuál puede ser el número de sus vértices y el de sus aristas? Formúlese y demuéstrese el problema dual.

22. Utilizando las igualdades (7.1) y (7.7) — (7.10), demuéstrese la fórmula

$$\sum_{i\geqslant 3}(2i + 2n - ni)\,V_i + 2\sum_{i\geqslant 3}(n - i)\,C_i = 4n. \qquad (7.17)$$

donde n es cualquier número natural. En dicha fórmula está «excluido» el término C_n.

Escríbase y demuéstrese la fórmula dual.

23. Valiéndose de la fórmula (7.17) para $n = 7$, demuéstrese el teorema siguiente. *Sea que el grado de cada vértice de un poliedro convexo es igual a 3 y que este poliedro no tiene caras triangulares ni cuadrangulares. Entonces tiene una cara pentagonal que hace contacto con otra cara pentagonal o hexagonal.* (Se dice que dos caras se tocan si tienen un lado común.)

Formúlese y demuéstrese el teorema dual.

§ 8. AXIOMAS DE LA CARACTERÍSTICA DE EULER

Hagamos el resumen principal de lo que hemos hecho hasta el momento y tracemos un breve programa de la exposición siguiente. Hemos dicho que a cada figura M de cierta clase (digamos, de la clase de los polígonos) puede asignarse su característica de Euler $\chi(M)$ dividiendo la figura en células de diferentes dimensiones. En otras palabras, en un conjunto de figuras fue determinada la *funciôn* χ por la fórmula $\chi(M) = V - A + C$, y nuestro problema principal consistía en demostrar que dicha función fue determinada *correctamente*, es decir, no depende del método de partición de la figura. Las determinaciones de tal tipo suelen llamarse *constructivas*, puesto que en ellas se da, de una vez, una regla (construcción), según la cual se puede calcular la función incógnita.

Ahora se dará una determinación nueva (*axiomática*) de la característica euleriana. Comencemos, precisamente, por la determinación de cierta clase de figuras llamadas elementales. Luego determinaremos la característica de Euler como función χ de esta clase de manera que satisfaga a los requerimientos (axiomas) simples y naturales previamente señalados. Como axiomas se elegirán las propiedades de la caracteristica de Euler ya conocidas por el lector. El problema principal consiste ahora en demostrar que tal función χ realmente existe y se determina de una manera única. Hemos de demostrar, además, que las determinaciones constructiva y axiomática de la característica de Euler son equivalentes, es decir, dan una misma función χ determinada sobre las figuras elementales.

El nuevo método de determinación de la característica de Euler tiene ciertas ventajas, la principal de las cuales

consiste en lo siguiente: permite deducir el valor de la función χ de la figura entera M, conociendo sus valores en las partes más simples que constituyen dicha figura (son, por regla general, polígonos convexos). Es importante señalar que dichas partes no tienen que ser obligatoriamente caras, aristas o en general células de partición.

La concepción axiomática de la determinación de la característica de Euler fue propuesta en el año 1955 por H. Hadwiger, matemático suizo (1908—1981).

Pasemos a la descripción (¡también axiomática!) del conjunto de *figuras elementales* $\mathscr{M}$. Dicho conjunto $\mathscr{M}$ de figuras sobre el plano se determina fijando los dos axiomas siguientes:

1) cada polígono convexo C se contiene en $\mathscr{M}$ (según otra terminología C es elemento de $\mathscr{M}$; se escribe simbólicamente así: $C \in \mathscr{M}$);

2) si las figuras A y B se contienen en $\mathscr{M}$, entonces en $\mathscr{M}$ se contiene su unión $A \cup B$ e intersección $A \cap B$ (la

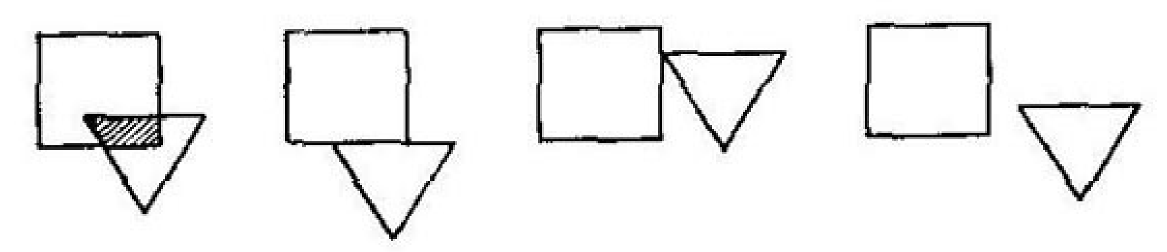


Fig. 31.

forma simbólica de anotación es la siguiente: si $A \in \mathscr{M}$ y $B \in \mathscr{M}$, entonces $A \cup B \in \mathscr{M}$ y $A \cap B \in \mathscr{M}$).

Deduzcamos los corolarios más simples de dichos axiomas. La intersección de dos polígonos convexos puede ser un polígono convexo, segmento o punto; puede no contener ni un solo punto (es decir, ser una figura *vacía*) (fig. 31). Llamemos en adelante polígonos *degenerados* (convexos) a los segmentos y puntos. La figura vacía se denota con el signo ϕ. Así pues, de los axiomas se desprende que la clase $\mathscr{M}$ de figuras elementales incluye todos los polígonos degenerados, así como el polígono vacío $\varnothing$.

Del axioma 2), por inducción, se desprende que el conjunto $\mathscr{M}$ debe contener la unión y la intersección de cualquier número finito de sus elementos A_i (simbólicamente,

si $A_i \in \mathscr{M}$ $(i = 1, \ldots, n)$, entonces $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathscr{M}$ y $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathscr{M}$).

Demostremos que en el plano existe un conjunto de figuras que satisfacen a los axiomas 1) y 2). Tal será el conjunto que consta de unas uniones finitas cualesquiera de polígonos convexos (posiblemente, degenerados). En adelante designaremos precisamente este conjunto con la letra $\mathscr{M}$ llamando *figuras elementales* a sus elementos (para mayor brevedad, simplemente *figuras*). Sean A y B figuras, es decir, sea

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} C_i, \quad B = \bigcup_{j=1}^{m} D_j, \tag{8.1}$$

donde C_i y D_j son polígonos convexos. Está claro que el axioma 1) se cumple, puesto que en la expresión (8.1) el número n o m de polígonos que se suman puede tomarse igual a 1. Está claro también que forma parte de la clase $\mathscr{M}$ la unión $A \cup B$, la cual tiene el mismo aspecto (8.1) que cada uno de los sumandos A y B. Resta demostrar que la intersección $A \cap B$ puede presentarse en forma de la unión de un número finito de polígonos convexos. Esto se desprende en el acto de la fórmula

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} C_i\right) \cap \left(\bigcup_{j=1}^{m} D_j\right) = \bigcup_{i,j} (C_i \cap D_j) \tag{8.2}$$

(de la «ley distributiva»), donde los índices i y j en el segundo miembro tienen los mismos valores que en el primero.

Notemos que además del conjunto $\mathscr{M}$ descrito, en el plano existen otras clases de figuras que satisfacen a los axiomas 1) y 2), pero no las consideraremos.

Las figuras elementales, como es fácil comprobar, son, por ejemplo, los polígonos (no obligatoriamente convexos) definidos en el § 2. Por otro lado, una figura elemental conexa, igual a la unión de polígonos convexos no degenerados, es un polígono. Esto se comprueba de igual manera que el hecho de que el hueco simple es un polígono simple (véase § 2, p. 22).

Además de los polígonos, integran el conjunto $\mathscr{M}$, claro está, los grafos planos. No es difícil convencerse deuqe cualquier figura elemental puede representarse en forma de la unión de varios polígonos y un grafo plano (posible-

mente, no conexo), pudiendo faltar algunos de dichos «sumandos».

Análogamente a la clase $\mathcal{M}$ de figuras elementales planas se determina la clase $\mathcal{M}(L)$ de figuras elementales sobre la recta L. Cada elemento de la clase $\mathcal{M}(L)$ es la unión de un número finito de segmentos que pueden degenerar en puntos. Es fácil demostrar que la unión $\mathcal{M}(L)$ satisface a los axiomas 1) y 2) (se hace igualmente que para la clase $\mathcal{M}$).

Vamos a considerar en el espacio R sólo la clase $\mathcal{M}(R)$ de figuras elementales, cada una de las cuales es la unión de un número finito de polígonos convexos (posiblemente, degenerados), sin coincidir obligatoriamente los planos de los diferentes polígonos. Integran dicha clase, por ejemplo, las fronteras de los polígonos convexos.

Pasamos a la determinación de la característica de Euler tratando, para precisión, del conjunto de las figuras $\mathcal{M}$. Diremos que sobre $\mathcal{M}$ está dada la *característica de Euler* χ si a cada figura elemental $A \in \mathcal{M}$ le está puesto en correspondencia el número $\chi(A)$ de manera que se cumplen los axiomas siguientes:

(α) *la característica de Euler de una figura vacía es igual a cero, es decir,*

$$\chi(\varnothing) = 0;$$

(β) *para cada polígono convexo no vacío (incluso degenerado) C tenemos:*

$$\chi(C) = 1;$$

(γ) *para las figuras elementales A y B cualesquiera*

$$\chi(A \cup B) = \chi(A) + \chi(B) - \chi(A \cap B).$$

La propiedad (γ) se denomina *aditividad* de la característica de Euler. Por eso se puede afirmar más brevemente que la característica de Euler es la función aditiva de la figura elemental «normada» por la condición (β).

Nos hemos encontrado anteriormente con la aditividad de la función χ, pero en condiciones más restringidas, cuando los polígonos A y B no tenían puntos comunes (véase p. 54). El lector conoce, sin lugar a dudas, otras funciones aditivas del polígono: baste decir que tal propiedad posee su área. Efectivamente, para hallar el área de la unión de dos polígonos es preciso tomar la suma de sus

áreas, restando de ésta el área de su intersección, puesto que esta última se considera en la suma dos veces.

Deduzcamos algunos corolarios de los axiomas de la característica euleriana.

Supongamos que están dadas n figuras elementales $A_1, \ldots, A_n$ o, como vamos a decir, supongamos que está dada la parte de n elementos de todo el conjunto $\mathcal{M}$. Vamos a escribirlo de la manera siguiente: $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_n\}$. Sea $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ la unión de todas las figuras dadas. Entonces la característica de Euler de la figura A, si tal existe, se expresa por las características eulerianas de las figuras $A_1, \ldots, A_n$, de la manera siguiente:

$$\chi(A) = \sum{}^{(1)}\chi(A_i) - \sum{}^{(2)}\chi(A_{i_1} \cap A_{i_2}) + \\ + \sum{}^{(3)}\chi(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}) - \\ - \sum{}^{(4)}\chi(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3} \cap A_{i_4}) + \ldots \\ \ldots + (-1)^{n-2} \sum{}^{(n-1)}\chi(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_{n-1}}) + \\ + (-1)^{n-1}\chi(A_1 \cap \ldots \cap A_n). \quad (8.3)$$

Expliquemos dicha fórmula. En ésta $\Sigma^{(1)}$ designa la suma tomada respecto a todas las figuras A_i o, lo que es lo mismo, respecto a todas las partes de 1 elemento del conjunto $\mathcal{A}$; $\Sigma^{(2)}$ designa la suma tomada respecto a todos los pares de figuras $\{A_{i_1}, A_{i_2}\}$, siendo $i_1 \neq i_2$, o bien, lo que es lo mismo, dicha suma se toma respecto a todas las partes de 2 elementos del conjunto $\mathcal{A}$; $\Sigma^{(3)}$ designa la suma tomada respecto a todas las ternas de figuras $\{A_{i_1}, A_{i_2}, A_{i_3}\}$, donde los índices i_1, i_2, e i_3 toman diferentes valores; en otras palabras, dicha suma se toma respecto a todas las partes de 3 elementos del conjunto $\mathcal{A}$, etc.

Si $n = 2$, entonces la fórmula (8.3) no es sino el axioma (γ). Por eso se debe demostrarla sólo para $n \geqslant 3$.

Sea $n = 3$. Entonces, utilizando el axioma (γ), tenemos

$$\chi(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = \chi[(A_1 \cup A_2) \cup A_3] = \\ \chi(A_1 \cup A_2) + \chi(A_3) - \chi[(A_1 \cup A_2) \cap A_3]. \quad (8.4)$$

Valiéndonos del caso particular

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

de la ley distributiva (8.2), tenemos

$$\chi[(A_1 \cup A_2) \cap A_3] = \chi[(A_1 \cap A_3) \cup (A_2 \cap A_3)] =$$
$$= \chi(A_1 \cap A_3) + \chi(A_2 \cap A_3) - \chi(A_1 \cap A_2 \cap A_3).$$

Sustituyamos dicha expresión para $\chi[(A_1 \cup A_2) \cap A_3]$ en la fórmula (8.4) y escribamos en ella misma $\chi(A_1 \cup A_2)$ según el axioma (γ). Entonces tenemos definitivamente:

$$\chi(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = \chi(A_1) + \chi(A_2) + \chi(A_3) -$$
$$- \chi(A_1 \cap A_2) - \chi(A_1 \cap A_3) - \chi(A_2 \cap A_3) +$$
$$+ \chi(A_1 \cap A_2 \cap A_3). \quad (8.5)$$

Así pues, la fórmula (8.3) está demostrada para $n = 3$. Demostremos su caso general por inducción respecto al número n, suponiendo que es justa para el número de figuras «integrantes» igual a $n - 1$, es decir, que se cumple la igualdad

$$\chi\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right) = \sum{}^{(1)}\chi(A_i) - \sum{}^{(2)}\chi(A_{i_1} \cap A_{i_2}) +$$
$$+ \sum{}^{(3)}\chi(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}) - \ldots +$$
$$+ (-1)^{n-3} \sum{}^{(n-2)}\chi(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_{n-2}}) +$$
$$+ (-1)^{n+2}\chi(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}). \quad (8.6)$$

Según el axioma (γ), tenemos lo siguiente:

$$\chi\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \chi\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right) +$$
$$+ \chi(A_n) - \chi\left[\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right) \cap A_n\right]. \quad (8.7)$$

Utilizando la ley distributiva en la forma siguiente:

$$\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right) \cap B = \bigcup_{i=1}^{m} (A_i \cap B)$$

y la suposición de la inducción (8.6), resulta que

$$\chi\left[\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right) \cap A_n\right] = \chi\left[\bigcup_{i=1}^{n-1} (A_i \cap A_n)\right] =$$
$$= \sum{}^{(1)}\chi(A_i \cap A_n) - \sum{}^{(2)}\chi(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_n) + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{n-3} \sum{}^{(n-2)}\chi(A_{i_1} \cap \ldots$$
$$\ldots \cap A_{i_{n-2}} \cap A_n) + (-1)^{n-2}\chi(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1} \cap A_n), \quad (8.8)$$

donde en cada una de las sumas todos los índices i_1, i_2, etc. son diferentes y recorren los valores desde 1 hasta $n-1$.

Sustituyamos ahora las expresiones (8.6) y (8.8) en la fórmula (8.7). La suma $\Sigma^{(1)}$ de la igualdad (8.6) se toma respecto a todas las figuras A_i, menos A_n, teniéndose además en (8.7) el sumando $\chi(A_n)$. Uniendo todos estos sumandos, obtenemos la suma $\Sigma^{(1)}$ de la fórmula (8.3) que se demuestra, ya respecto a todas las figuras sin excepción. Luego, en el segundo miembro de (8.6) la suma $\Sigma^{(2)}$ se toma respecto a todos los pares de figuras $\{A_{i_1}, A_{i_2}\}$ que no contienen la figura A_n. A fin de obtener *todos* los pares de figuras (con diferentes índices), hay que añadir también a los pares señalados los pares $\{A_1, A_n\}, \ldots, \{A_{n-1}, A_n\}$. Precisamente a los últimos pares les corresponde en la fórmula (8.8) la suma $\Sigma^{(1)}$. Por eso, sumando a la suma $\Sigma^{(2)}$ de (8.6) la suma $\Sigma^{(1)}$ de (8.8) obtenemos la suma $\Sigma^{(2)}$ de la igualdad (8.3) que se demuestra, teniendo todos los sumandos de dicha suma el signo menos. Análogamente, la suma $\Sigma^{(3)}$ de la fórmula en cuestión se obtiene sumando $\Sigma^{(3)}$ de (8.6) y $\Sigma^{(2)}$ de (8.8), etc. La igualdad (8.3) está demostrada.

Escribamos otro caso particular de dicha igualdad que será necesario en adelante:

$$\chi\left(\bigcup_{i=1}^{4} A_i\right) = \sum{}^{(1)}\chi(A_i) - \sum{}^{(2)}\chi(A_{i_1} \cap A_{i_2}) +$$
$$+ \sum{}^{(3)}\chi(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}) - \chi(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4). \quad (8.9)$$

Notemos que no es obligatorio exigir que en la fórmula (8.3) todas las figuras $A_1, \ldots, A_n$ sean diferentes. En otras palabras, ciertas figuras A_i pueden integrar el conjunto $\mathcal{A}$ varias veces; en particular, $\mathcal{A}$ puede constar de ejemplares de una misma figura.

La fórmula (8.3) lleva el nombre de «principio de inclusión y exclusión». Dado que la demostración de dicho principio se funda sólo en el axioma (γ) y la ley distributiva, es justo para funciones aditivas cualesquiera del polígono, por ejemplo, para el área (véase más detalladamente sobre esto en el artículo [7]). Como otro ejemplo de una función aditiva, pero no del polígono, sino de un conjunto finito, puede citarse el número de sus elementos o, como se dice, su potencia. En otras palabras, en un conjunto de n elementos dicha función toma el valor igual a n. En la aplicación del principio de inclusión y exclu-

sión está basada, para este caso, la solución de los problemas 24 y 25.

Supongamos que ahora en la fórmula (8.3) todas las figuras A_j son polígonos convexos no vacíos; entonces, de acuerdo con el axioma (β), cada sumando de $\Sigma^{(1)}$ es igual a 1. De los axiomas (α) y (β) se desprende que cada uno de los sumandos de $\Sigma^{(2)}$ es igual a 0 ó 1, en función de si es vacía o no la intersección del par de polígonos convexos que corresponden a dicho sumando. Análogamente, cada sumando de $\Sigma^{(3)}$ es igual a 0 ó 1 en función de si es vacía o no la intersección de la terna de polígonos convexos que corresponden a dicho sumando, etc. Así se obtiene la fórmula siguiente para el cálculo de la característica euleriana de la figura A igual a la unión de un número finito n de polígonos convexos no vacíos A_j:

$$\chi(A) = q_1 - q_2 + q_3 - \ldots + (-1)^{n-1} q_n. \quad (8.10)$$

Aquí q_i $(i = 1, \ldots, n)$ designa el número de tales partes de i elementos del conjunto $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_n\}$ que los polígonos que integran cada una de dichas partes tienen una intersección no vacía.

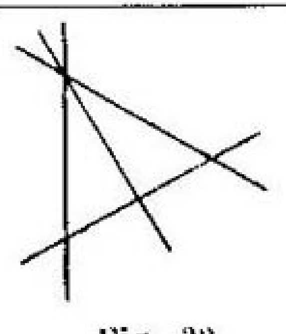


Fig. 32

Así pues, si para la clase $\mathcal{M}$ de todas las figuras elementales existe una característica de Euler χ que satisface a los axiomas (α) — (γ), entonces ésta se determina *unívocamente*: su valor se da mediante la fórmula (8.10). En particular, la característica de Euler de cualquier figura elemental es un número entero.

Consideremos un ejemplo simple. Supongamos que el conjunto $\mathcal{A}$ consta de cuatro segmentos, mientras que la figura A es la unión de dichos segmentos (fig. 32). En este caso hay seis pares de segmentos con intersección no vacía, una terna de segmentos con intersección no vacía; la intersección de los cuatro segmentos es vacía. Por eso tenemos $\chi(A) = 4 - 6 + 1 - 0 = -1$.

PROBLEMAS

24. En un instituto de investigación científica trabajan 67 personas. Entre éstas, 47 conocen el inglés, 35, el alemán y 20, el francés. Además se sabe que 23 personas dominan a la vez el

inglés y el alemán, 12 personas, el inglés y el francés, 11 personas, el alemán y el francés y, por fin, 5 personas dominan los tres idiomas. ¿Cuántas personas en el instituto no conocen ninguno de estos idiomas?

25. Entre los números naturales de 1 a 1000, ¿cuántos son los que no se dividen por ninguno de los números 2, 3, 5?

26. Una figura consta de cinco polígonos convexos, teniendo todos éstos una intersección no vacía. Hállese la característica de Euler de dicha figura.

§ 9. DEMOSTRACIÓN DE LA EXISTENCIA DE LA CARACTERÍSTICA DE EULER

Demostremos la existencia de la característica de Euler en las clases de figuras elementales sobre la recta, el plano y en el espacio, consecutivamente.

Sea $A = \bigcup_{j=1}^{m} B_j$ una figura elemental de la clase $\mathscr{M}(L)$, es decir, la unión de segmentos B_j (pueden ser degenerados) que se encuentran sobre la recta L. Demostremos que la figura A es igual a la unión de sus componentes, es decir, de los segmentos C_i entre los cuales no hay dos que tengan puntos comunes. Efectivamente, tomemos el segmento B_1. Son posibles los dos casos siguientes: bien B_1 ya es un componente de la figura A (designémoslo entonces por C_1), bien no lo es. En el segundo caso entre los segmentos $B_2, B_3, \ldots, B_m$ existen tales (sean, para mayor precisión, $B_2, \ldots, B_k$), cada uno de los cuales tiene por lo menos un punto común con el segmento B_1. Entonces la unión $C'_1 = \bigcup_{j=1}^{k} B_j$ es, evidentemente, un segmento. De nuevo son posibles dos casos: bien C'_1 ya es un componente de la figura A (entonces designémoslo como $C'_1 = C_1$), bien no lo es. En el segundo caso entre los segmentos $B_{k+1}, \ldots, B_m$ existen tales (sean, por ejemplo, $B_{k+1}, \ldots, B_p$), cada uno de los cuales tiene por lo menos un punto común con el segmento C'_1. En este caso la unión $C''_1 = \bigcup_{j=1}^{p} B_j$ es un segmento. De nuevo son posibles dos casos: bien C''_1 ya es un componente de la figura A, bien no lo es. Puesto que en total existe un número finito de segmentos B_j, dicho proceso debe terminar, es decir,

hemos de separar el componente C_1 de la figura A. Después, excluyendo del sistema dado de segmentos $\{B_1, \ldots, \ldots, B_m\}$ los que componen C_1 y aplicando el procedimiento señalado a los segmentos restantes, hemos de separar el componente C_2, luego C_3 y, finalmente, C_n. Se obtiene la igualdad:

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} C_i,$$

donde C_i es un componente de la figura A.

Supongamos ahora que

$$\chi(A) = n,$$

es decir, llamemos característica euleriana de la figura A al número de sus componentes. Para justificarlo, es necesario comprobar que *para dicha función χ son válidos los axiomas* (α) — (γ). En lo que se refiere a los aximas (α) y (β), éstos se realizan de una manera trivial. Resta demostrar la aditividad de la función χ. Sea $B = \bigcup_{j=1}^{m} D_j$ otra figura de la clase $\mathcal{M}(L)$ con componentes D_j. Demostraremos el axioma (γ) en la forma siguiente:

$$\chi(A) + \chi(B) = \chi(A \cup B) + \chi(A \cap B) \qquad (9.1)$$

por inducción respecto a n componentes de la figura A. Supongamos primeramente que $n = 1$, es decir, que A consta de un segmento C_1, y sea que C_1 tiene puntos comunes exactamente con k segmentos, componentes de la figura B, donde $0 \leqslant k \leqslant m$ y m es el número de componentes de B. Entonces el primer miembro de la fórmula (9.1) es igual a $1 + m$. El primer sumando del segundo miembro es igual a $1 + m - k$, puesto que cuando reunimos ambas figuras en una sola, k segmentos de la figura B se «pegan» en un segmento (fig. 33) en tanto que el segundo sumando del segundo miembro es igual al número k según la suposición. Por consiguiente, la igualdad (9.1) es justa para el caso particular dado. Supongamos que ella está demostrada para todas las figuras A con un número de componentes no mayor que $n - 1$ (para la figura B fija); demostrémosla para el caso cuando A tenga exactamente n componentes. Pongamos

$$A_1 = C_1, \quad A_2 = \bigcup_{i=1}^{2} C_i, \; \ldots, \; A_{n-1} = \bigcup_{i=1}^{n-1} C_i, \; A = A_n = \bigcup_{i=1}^{n} C_i.$$

Según la suposición de inducción, es justa la igualdad siguiente:

$$\chi(A_{n-1})+\chi(B)=\chi(A_{n-1}\cup B)+\chi(A_{n-1}\cap B). \quad (9.2)$$

Supongamos que el segmento C_n se interseca exactamente con k_n segmentos de la figura B y, por tanto, no se interseca con los demás $m-k_n$ segmentos de dicha figura. Pasemos ahora de la figura A_{n-1} a la A_n y veamos cómo varían en este caso ambos miembros de la igualdad (9.2).

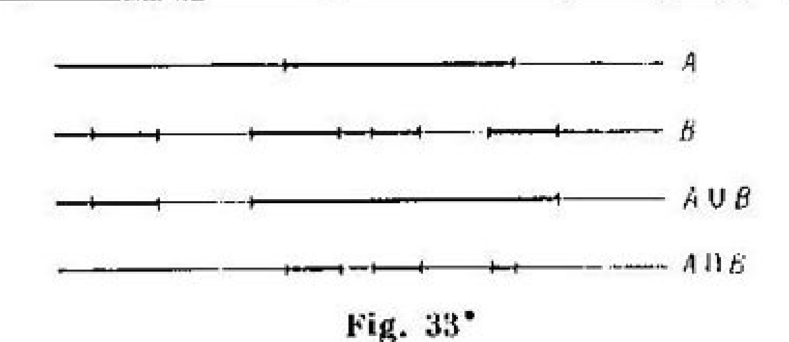


Fig. 33*

Está claro que $\chi(A_n)-\chi(A_{n-1})=1$. Por eso el primer miembro de la igualdad (9.2) aumenta para tal transición en 1. Luego

$$\chi(A_n\cup B)-\chi(A_{n-1}\cup B)=1-k_n,$$

puesto que el nuevo segmento C_n «pega» en un componente k_n segmentos de la figura B; además,

$$\chi(A_n\cap B)-\chi(A_{n-1}\cap B)=k_n.$$

Por eso el segundo miembro de (9.2) aumenta en k_n+ $+(1-k_n)=1$, es decir, varía igualmente que el primer miembro. Esto quiere decir que

$$\chi(A_n)+\chi(B)=\chi(A_n\cup B)+\chi(A_n\cap B),$$

lo que precisamente era necesario demostrar.

Así pues, está demostrada la existencia de la característica de Euler sobre la clase $\mathscr{A}(L)$.

Pasemos al caso del plano. Sea $\{C_1, \ldots, C_n\}$ un conjunto finito de polígonos convexos, y $A=\bigcup_{j=1}^{n} C_j$, una figura elemental de la clase $\mathscr{A}$. Entre dichos polígonos

pueden existir degenerados, o sea segmentos o puntos. Vamos a considerar, para simplificar, que el punto es también un segmento (cuyos extremos coinciden). Examinemos un conjunto T de segmentos tal que cada uno de ellos es o bien el lado de algún polígno C_j (si este último no es degenerado), o bien el propio polígono (si es degenerado). Llamemos *vértices* de la figura A, primero, a los extremos de los segmentos que integran la igualdad T, segundo,

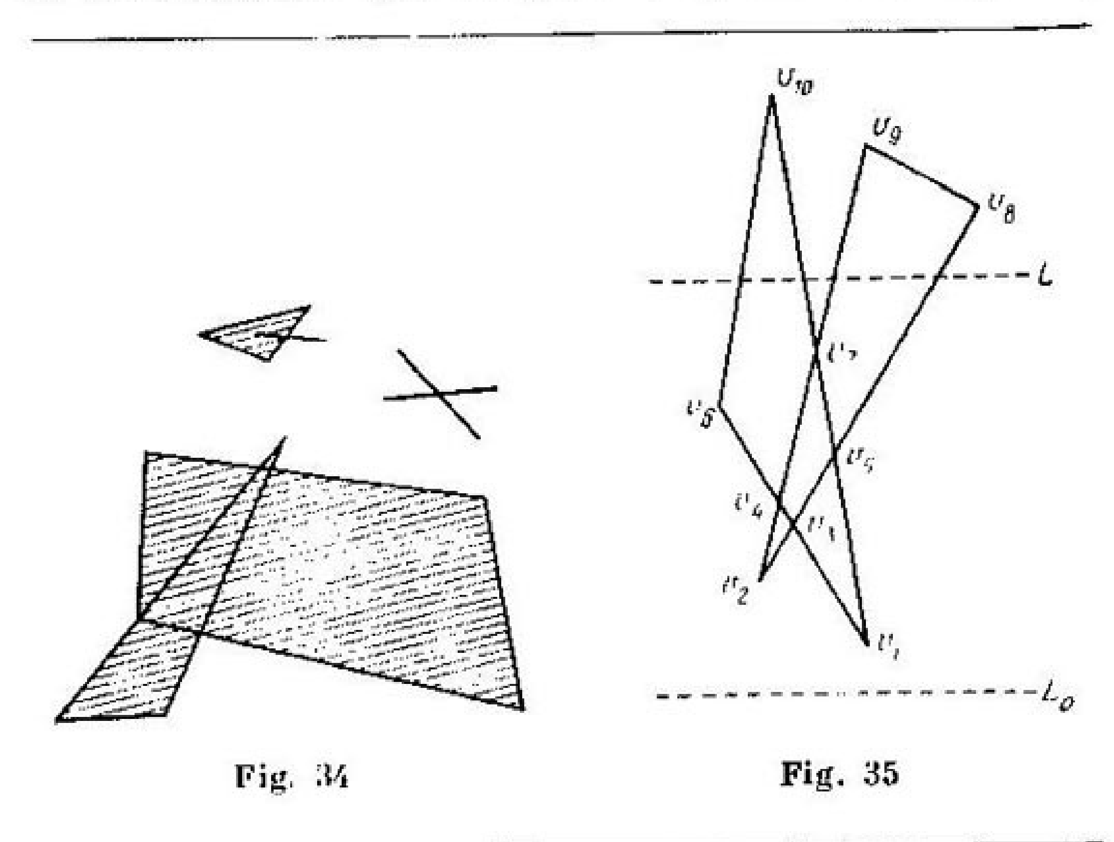


Fig. 34 **Fig. 35**

a los puntos de intersección de tales dos (o más) segmentos. Por ejemplo, la figura de la fig. 34 tiene 21 vértices.

Supongamos que todos los vértices de la figura se encuentran a diferente altura y están numerados en orden de su aumento, es decir, que v_1 es el vértice más bajo, v_2 se encuentra por encima de v_1, pero más bajo que v_3, etc., v_m es el vértice superior (fig. 35).

Tracemos la recta horizontal L_0 situada bajo la figura A y designemos por h_i ($i = 1, \ldots, m$) la distancia entre el vértice v_i y dicha recta. Según nuestra suposición $0 < h_1 < h_2 < \ldots < h_m$. Sea L una recta horizontal que se mueve por el plano hacia arriba, de la posición inicial L_0. La intersección $C_j \cap L$ es un segmento (posiblemente, degenerado o vacío). De acuerdo con la ley distri-

butiva tenemos

$$A \cap \bigcup_{j=1}^{n} (C_j \cap L)$$

y, por tanto, dicha intersección es una unión finita de segmentos, es decir, una figura de la clase $\mathscr{M}(L)$. Por eso existe la característica de Euler $\chi(A \cap L)$ de intersección de la figura A con la recta móvil. Sea $\varphi(h) = \chi(A \cap L)$ designación de dicha característica para tal posición de la recta L cuando ésta se encuentra a una distancia h de su posición inicial L_0. Designemos también por L_i la posición fija de la recta L en el momento cuando ésta pasa por el vértice v_i $(i = 1, \ldots, m)$, y por L_{i-0} tal posición cuando ésta se halla más bajo que la recta L_i, pero por encima de L_{i-1}. Es fácil ver (fig. 35) que cuando la recta L se traslada, permaneciendo entre dos vértices vecinos en altura (así como permaneciendo más abajo del vértice v_1 o por encima del v_m), entonces el número $\varphi(h)$ no varía. Puede variar sólo al «acercarse» la recta L por abajo a algún vértice o bien al «desprenderse» de éste hacia arriba. Pongamos

$$\varphi(h_i) = \chi(A \cap L_i), \quad \varphi(h_i - 0) = \chi(A \cap L_{i-0}) \qquad (9.3)$$

y determinemos la característica euleriana de la figura $A \in \mathscr{M}$ por la igualdad

$$\chi(A) = \sum_{i=1}^{m} [\varphi(h_i) - \varphi(h_i - 0)]. \qquad (9.4)$$

Así pues, la diferencia $\varphi(h_i) - \varphi(h_i - 0)$ es la variación del número $\chi(A \cap L)$ al «acercarse» la recta L por abajo al vértice v_i (¡pero no al «desprenderse» de éste hacia arriba ni al «traspasarlo»!), mientras que la característica de Euler $\chi(A)$ es la suma de tales variaciones tomada respecto a todos los vértices.

Notemos que no todas las diferencias que integran la suma (9.4) difieren obligatoriamente de cero. Por ejemplo, para la figura A (fig. 35) tenemos:

$$\varphi(h_1) - \varphi(h_1 - 0) = \varphi(h_2) - \varphi(h_2 - 0) = 1,$$
$$\varphi(h_3) - \varphi(h_3 - 0) = -1,$$

y para los demás vértices las diferencias son iguales a cero. Por eso la determinación da $\chi(A) = 1$.

Demostremos que la función χ de la figura A, determinada por la igualdad (9.4), satisface los axiomas (α) — (γ) y, por tanto, puede realmente llamarse característica de Euler.

Está claro que $\chi(\varnothing) = 0$. Sea A un polígono convexo. Entonces

$$\varphi(h_1) - \varphi(h_1 - 0) = 1, \text{ pero } \varphi(h_i) - \varphi(h_i - 0) = 0$$

para todos los vértices v_i con los números $i > 1$ (si tales existen). Por eso $\chi(A) = 1$. Así pues, los axiomas (α) y (β) se cumplen.

Comprobemos la aditividad de la función χ. Sean A y B unas figuras elementales. Se necesita demostrar la justeza de la igualdad

$$\chi(A) + \chi(B) = \chi(A \cup B) + \chi(A \cap B). \qquad (9.5)$$

Sean $v_1, \ldots, v_r$ los vértices de la figura $A \cup B$ numerados según el orden de aumento de su altura (notemos que basta con examinar sólo el conjunto de vértices de la unión $A \cup B$, puesto que los vértices de las otras tres figuras forman parte de éste). Supongamos que las designaciones L_i y L_{i-0} ($i = 1, \ldots, r$) tienen el mismo sentido de antes. Cada una de las rectas L_i y L_{i-0} se interseca con cada una de las figuras A, B, $A \cup B$, $A \cap B$ por la unión finita de segmentos. Introduzcamos, para simplificar, las designaciones

$$\varphi_i(A) = \chi(A \cap L_i), \quad \varphi_{i-0}(A) = \chi(A \cap L_{i-0})$$

y análogamente para las otras tres figuras. Entonces, dada la aditividad de la característica de Euler para la clase $\mathcal{M}(L)$, obtenemos las igualdades siguientes:

$$\varphi_i(A) + \varphi_i(B) = \varphi_i(A \cup B) + \varphi_i(A \cap B), \qquad (9.6)$$

$$\varphi_{i-0}(A) + \varphi_{i-0}(B) = \varphi_{i-0}(A \cup B) + \varphi_{i-0}(A \cap B) \qquad (9.7)$$

para todos $i = 1, \ldots, r$. Restemos término a término la igualdad (9.7) de la (9.6) y sumemos las igualdades obtenidas respecto a todos $i = 1, \ldots, r$. Entonces tenemos:

$$\sum_{i=1}^{r} [\varphi_i(A) - \varphi_{i-0}(A)] + \sum_{i=1}^{r} [\varphi_i(B) - \varphi_{i-0}(B)] =$$

$$= \sum_{i=1}^{r} [\varphi_i(A \cup B) - \varphi_{i-0}(A \cup B)] +$$

$$+ \sum_{i=1}^{r} [\varphi_i(A \cap B) - \varphi_{i-0}(A \cap B)],$$

lo que significa, tomando en consideración (9.3) y (9.4), que la igualdad (8.5) es válida.

Ahora bien: hemos demostrado la existencia de la característica de Euler para la clase $\mathscr{M}$ de figuras elementales sobre el plano.

La demostración respectiva para la clase $\mathscr{M}$ (R) de figuras elementales en el espacio se efectúa análogamente utilizando el método de plano móvil y la característica de Euler ya para la clase $\mathscr{M}$.

§ 10. EQUIVALENCIA ENTRE DOS DETERMINACIONES DE LA CARACTERÍSTICA DE EULER

La introducción a dicho párrafo contiene algunos datos sobre los coeficiente binominales necesarios más adelante.

Supongamos que están dados un número natural n y cierto conjunto de n elementos $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Cualquier parte de m elementos de este conjunto se denomina *combinación m* (o *combinación respecto a m*) de n elementos dados. El número de diferentes combinaciones m de n elementos se designa con los símbolos $\binom{n}{m}$ o C_n^m (preferimos utilizar el primero de ellos). Por ejemplo, el conjunto de 4 elementos $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ tiene seis partes de 2 elementos: $\{a_1, a_2\}$, $\{a_1, a_3\}$, $\{a_1, a_4\}$, $\{a_2, a_3\}$, $\{a_2, a_4\}$, $\{a_3, a_4\}$, siendo por eso $\binom{4}{2} = C_4^2 = 6$. La expresión $\binom{n}{m}$ tiene sentido no sólo para $m \leqslant n$, sino también para $m > n$, siendo en este caso igual a cero, puesto que el conjunto de n elementos no tiene, en absoluto, partes de elementos m para $m > n$. Señalemos especialmente la igualdad $\binom{n}{0} = 1$ que significa que cualquier conjunto de n elementos tiene una parte de 0 elementos, es decir, el conjunto vacío.

Los números $\binom{n}{m}$ llámanse también *coeficientes binomiales*, puesto que integran la fórmula conocida

$$(1 + x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \ldots + \binom{n}{n}x^n \quad (10.1)$$

que expresa la potencia n del binomio $1 + x$ en forma de polinomio con exponentes crecientes de la letra x. Nosotros «casi» no necesitaremos de la fórmula (10.1).

Notemos la fórmula siguiente, también conocida, para el cálculo de los coeficientes binomiales:

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!} = \frac{n\,(n-1)\,\ldots\,[n-(m-1)]}{1\cdot 2\,\ldots\,m}.$$

Demostremos la igualdad

$$\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m-1} + \binom{n-1}{m}. \qquad (10.2)$$

Tomemos con este propósito algún conjunto de n elementos $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ dividiendo todas sus partes de elementos m en dos clases. Incluyamos a la primera clase aquellas partes que contienen el elemento a_n y a la segunda, las que no lo contienen. El número de partes que integran la primera clase es igual a $\binom{n-1}{m-1}$; efectivamente, si de todas esas partes se excluye el elemento a_n, se obtendrán todas las partes de $(m - 1)$ elementos del conjunto de $(n - 1)$ elementos $\{a_1, \ldots, a_{n-1}\}$. Por otro lado, las partes que integran la segunda clase son partes de elementos m del mismo conjunto $\{a_1, \ldots, a_{n-1}\}$; por eso su número es igual a $\binom{n-1}{m}$. Puesto que las dos clases señaladas no tienen elementos comunes (en otras palabras, ninguna parte de elementos m del conjunto A constituye simultáneamente ambas clases), entonces la igualdad (10.2) está demostrada.

La fórmula que se aduce a continuación jugará un papel muy importante en lo sucesivo

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \ldots + (-1)^m \binom{n}{m} =$$
$$= (-1)^m \binom{n-1}{m} \qquad (10.3)$$

válida para todos los números enteros no negativos m y n al igual que su caso particular

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \ldots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0 \qquad (10.4)$$

para $m = n$. Demostremos la fórmula (10.3) por inducción respecto al número m. Si $m = 0$ ó bien $m = 1$, esta fórmula es evidente. Supongamos que la misma es válida para $m = j$, demostrémosla para $m = j + 1$. Así pues, supongamos que se conoce

$$\sum_{i=0}^{j}(-1)^i\binom{n}{i} = (-1)^j\binom{n-1}{j}.$$

Entonces, valiéndonos de la igualdad (10.2), obtenemos

$$\sum_{i=0}^{j+1}(-1)^i\binom{n}{i} = (-1)^j\binom{n-1}{j} + (-1)^{j+1}\binom{n}{j+1} =$$

$$= (-1)^j\left[\binom{n-1}{j} - \binom{n}{j+1}\right] = (-1)^j\left[-\binom{n-1}{j+1}\right] =$$

$$= (-1)^{j+1}\binom{n-1}{j+1}.$$

Así pues, hemos demostrado (10.3). Señalemos que la fórmula (10.4) se obtiene inmediatamente de la igualdad (10.1), si en ésta se adopta $x = -1$.

A veces es más cómodo utilizar otras formas de las igualdades (10.3) y (10.4), a saber:

$$\binom{n}{1} - \binom{n}{2} + \binom{n}{3} - \ldots + (-1)^{m+1}\binom{n}{m} = 1 + $$

$$+ (-1)^{m+1}\binom{n-1}{m}. \qquad (10.5)$$

$$\binom{n}{1} - \binom{n}{2} + \binom{n}{3} - \ldots + (-1)^{n+1}\binom{n}{n} = 1. \qquad (10.6)$$

Pasemos a la demostración de la equivalencia de las dos determinaciones de la característica de Euler sin calcularla. Lo haremos para las tres clases de figuras siguientes: grafos, fronteras de poliedros convexos y polígonos simples sobre el plano, partidos en caras convexas. En dichas demostraciones es importante el que la arista del grafo contiene dos vértices que une entre sí, y el que la cara de poliedro (o del polígono simple) contiene su frontera. Se podría demostrar que las dos determinaciones de la característica de Euler (constructiva y axio-

mática) son equivalentes para cualquier figura que admite la partición en células.

Supongamos que está dado el grafo G. Puede considerarse que éste no tiene vértices aislados siendo por eso unión de un número finito de aristas, es decir, de segmentos. A ser más exacto, el grafo G está situado en el espacio y no sobre el plano. Su característica de Euler, según la fórmula (8.10), es igual a

$$\chi(G) = q_1 - q_2 + \ldots + (-1)^{n-1} q_n. \qquad (10.7)$$

Aquí q_1 designa el número total de aristas del grafo G; q_2, el número de pares de sus aristas que tienen intersección no vacía o, lo que es igual, que tienen un vértice común; q_3, el número de ternas de aristas con intersección no vacía; finalmente, q_n es el número de tales partes de n elementos del conjunto de aristas, que todas las aristas que integran cada una de dichas partes tienen intersección no vacía, es decir, tienen un vértice común. Debemos demostrar la fórmula

$$q_1 - q_2 + \ldots + (-1)^{n-1} q_n = \mathrm{V} - \mathrm{A}. \qquad (10.8)$$

Señalemos previamente la relación entre el número de aristas A y los números de vértices de diferentes grados. Supongamos que V_1 designa el número de vértices del grafo con el grado 1; V_2, el número de sus vértices con el grado 2, etc.; finalmente, V_n es el número de vértices con el máximo grado n. Entonces

$$\mathrm{V}_1 + 2\mathrm{V}_2 + 3\mathrm{V}_3 + \ldots + n\mathrm{V}_n = 2\mathrm{A}. \qquad (10.9)$$

(Obsérvese que en las igualdades (10.8) y (10.9) con la letra n está designado prácticamente un mismo número.) La relación (10.9) se obtiene muy fácilmente sumando las aristas del grafo respecto a todos los vértices de éste, teniendo presente que para tal adición cada arista se considera dos veces.

Para la demostración de (10.8) notemos ante todo que $q_1 = \mathrm{A}$. Hallemos ahora la expresión para el número q_2. Un par de aristas con intersección no vacía «surge», primero, gracias a la existencia de los vértices con el grado 2, correspondiendo a cada uno de estos vértices un par de éstos. Luego, dado que en cada vértice del grado 3 convergen 3 aristas, entonces, a éste le corresponden tantos pares de aristas con intersección no vacía, cuantas partes de 2 elementos de un conjunto de 3 elementos exis-

ten, es decir, $\binom{3}{2}$. Análogamente, a cada vértice del grado 4 le corresponden $\binom{4}{2}$ pares de aristas con intersección no vacía, etc. Por fin, a cada vértice con el máximo grado n le corresponden $\binom{n}{2}$ pares de este género. Dado que las aristas se intersecan sólo en los vértices, de todo lo dicho podemos deducir que

$$q_2 = \binom{2}{2}V_2 + \binom{3}{2}V_3 + \binom{4}{2}V_4 + \ldots + \binom{n}{2}V_n.$$

Partiendo de las mismas ideas (tomando en consideración que las ternas de aristas con intersección no vacía no «surgen» de los vértices con el grado 2), obtenemos la igualdad siguiente:

$$q_3 = \binom{3}{3}V_3 + \binom{4}{3}V_4 + \binom{5}{3}V_5 + \ldots + \binom{n}{3}V_n.$$

Análogamente,

$$q_4 = \binom{4}{4}V_4 + \binom{5}{4}V_5 + \ldots + \binom{n}{4}V_n,$$

. . . .

$$q_{n-1} = \binom{n-1}{n-1}V_{n-1} + \binom{n}{n-1}V_n,$$

$$q_n = \binom{n}{n}V_n.$$

Sustituyendo en la fórmula (10.7) q_i por los valores hallados tenemos:

$$\chi(G) = A - \left[\binom{2}{2}V_2 + \binom{3}{2}V_3 + \binom{4}{2}V_4 + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + \binom{n-1}{2}V_{n-1} + \binom{n}{2}V_n\right] + \left[\binom{3}{3}V_3 + \right.$$
$$\left. + \binom{4}{3}V_4 + \ldots + \binom{n-1}{3}V_{n-1} + \binom{n}{3}V_n\right] -$$
$$- \left[\binom{4}{4}V_4 + \ldots + \binom{n-1}{4}V_{n-1} + \binom{n}{4}V_n\right] + \ldots$$

$$\ldots + \left| (-1)^{n-2}\binom{n-1}{n-1} V_{n-1} + \binom{n}{n-1} V_n \right| +$$

$$+ (-1)^{n-1}\binom{n}{n} V_n$$

o bien, tras reagrupar los términos,

$$\chi(G) = A - \binom{2}{2} V_2 + \left| -\binom{3}{2} + \binom{3}{3} \right| V_3 + \ldots$$

$$\ldots + \left| -\binom{i}{2} + \binom{i}{3} - \ldots + (-1)^i \binom{i}{i-1} + \right.$$

$$\left. + (-1)^{i+1}\binom{i}{i} \right| V_i + \ldots + \left[-\binom{n}{2} + \binom{n}{3} - \ldots \right.$$

$$\left. \ldots + (-1)^n \binom{n}{n-1} + (-1)^{n+1}\binom{n}{n} \right| V_n.$$

Aplicando la igualdad (10.6) obtenemos

$$\chi(G) = A - V_2 - 2V_3 - \ldots - (i-1)V_i - \ldots - (n-1)V_n.$$

Luego transformamos el segundo miembro de la manera siguiente:

$$\chi(G) = (-A + 2A) + (V_1 - V_1) + (V_2 - 2V_2) +$$
$$+ (V_3 - 3V_3) + \ldots + (V_n - nV_n) = - A + (V_1 +$$
$$+ V_2 + \ldots + V_n) + (2A - V_1 - 2V_2 - 3V_3 - \ldots$$
$$\ldots - nV_n).$$

En virtud de la fórmula (10.9) y la igualdad evidente

$$V = V_1 + V_2 + V_3 + \ldots + V_n$$

tenemos que $\chi(G) = V - A$, lo que había que demostrar.

Sea X un poliedro convexo. De acuerdo con la segunda determinación, la característica de Euler de su frontera ∂X es igual a

$$\chi(\partial X) = q_1 - q_2 + q_3 - \ldots + (-1)^{n-1} q_n, \quad (10.10)$$

donde q_1 es el número total de caras del poliedro X; q_2, el número de pares de caras que tienen intersección no vacía; q_3, el número de ternas de caras que tienen intersección no vacía; $\ldots$, q_n, el número de tales partes de n elementos del conjunto de caras, que todas las caras

que integran una parte tienen una intersección no vacía. Tenemos que demostrar la igualdad

$$q_1 - q_2 + q_3 - \ldots + (-1)^{n-1} q_n = V - A + C. \quad (10.11)$$

Notemos, ante todo, que siempre $q_1 = C$. Consideremos primeramente el caso más simple, cuando los grados de todos los vértices del poliedro son iguales a 3 (como lo tiene el tetraedro, el cubo o el dodecaedro). Entonces $q_2 = A$, puesto que en este caso cada intersección no vacía de dos caras es obligatoriamente la arista del poliedro y, viceversa, todas las aristas de éste tienen tal aspecto. Además, cada vértice del poliedro es igual a la intersección no vacía de tres caras precisamente y, viceversa, cada una de estas intersecciones determina el vértice. De aquí se desprende que $q_3 = V$, $q_4 = q_5 = \ldots = 0$, por eso

$$q_1 - q_2 + q_3 = C - A + V.$$

Con esto queda demostrado el caso particular de la fórmula (10.11).

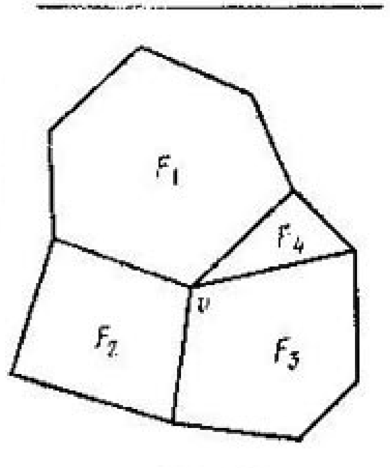


Fig. 36

En el caso general, cada intersección no vacía de dos caras de un poliedro es su arista o su vértice. No obstante, esto de ninguna manera significa que $q_2 = A + V$, porque un mismo vértice puede encontrarse entre estas intersecciones más de una vez en función de su grado. Por ejemplo, si v es el vértice de grado 4, entonces éste se contiene en las cuatro caras diferentes F_1, F_2, F_3 y F_4 del poliedro X (fig. 36, donde están representadas no las caras en sí, sino sus proyecciones sobre el plano, lo que no cambia, desde luego, el asunto). Dichas caras forman $\binom{4}{2} = 6$ intersecciones pares no vacías. Entre éstas sólo cuatro intersecciones, a saber: $F_1 \cap F_2$, $F_2 \cap F_3$, $F_3 \cap F_4$ y $F_4 \cap F_1$ son iguales a las aristas; las dos restantes, o sea $F_1 \cap F_3$ y $F_2 \cap F_4$ coinciden con el propio vértice v. En general, si el grado del vértice v es igual a i ($i \geqslant 3$), entonces i caras que tienen el punto v por su vértice común dan $\binom{i}{2}$ intersecciones pares no vacías; entre éstas $\binom{i}{1}$ intersecciones corresponden a las aristas

que salen de dicho vértice, mientras que las demás, cuyo número es igual a $\binom{i}{2}-\binom{i}{1}$, coinciden con el propio vértice v. Así pues, tenemos la igualdad

$$q_2 = A + \left[\binom{3}{2}-\binom{3}{1}\right] V_3 + \left[\binom{4}{2}-\binom{4}{1}\right] V_4 + \ldots$$
$$\ldots + \left[\binom{n}{2}-\binom{n}{1}\right] V_n, \quad (10.12)$$

donde V_3 designa el número de vértices del poliedro que tienen el grado igual a 3, . . .; V_n, el número de sus vértices con el máximo grado n (aquí, al igual que antes, en las fórmulas (10.10) y (10.12) la letra n designa un mismo número). A partir de (10.12) y la igualdad evidente

$$V = V_3 + V_4 + \ldots + V_n = \binom{3}{0} V_3 + \binom{4}{0} V_4 + \ldots$$
$$\ldots + \binom{n}{0} V_n$$

se obtiene

$$q_1 - q_2 = C - A - \left\{\left[\binom{3}{2}-\binom{3}{1}\right] V_3 + \ldots\right.$$
$$\left.\ldots + \left[\binom{n}{2}-\binom{n}{1}\right] V_n\right\} + V - \left[\binom{3}{0} V_3 + \ldots\right.$$
$$\left.\ldots + \binom{n}{0} V_n\right] = C - A + V - \left\{\left[\binom{3}{2}-\binom{3}{1}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\binom{3}{0}\right] V_3 + \ldots + \left[\binom{n}{2}-\binom{n}{1}+\binom{n}{0}\right] V_n\right\}.$$

A partir de aquí está claro que para terminar la demostración de la fórmula (10.11) basta con comprobar la validez de la igualdad

$$\left[\binom{3}{2}-\binom{3}{1}+\binom{3}{0}\right] V_3 + \ldots + \left[\binom{n}{2}-\binom{n}{1}+\right.$$
$$\left.+\binom{n}{0}\right] V_n - q_3 + q_4 - \ldots + (-1)^n q_n = 0. \quad (10.13)$$

Ocupémonos de esta comprobación. Con este propósito notemos que cada intersección no vacía de tres, cuatro

o de cualquier número mayor que i de caras es obligatoriamente un vértice del poliedro. En este caso la intersección no vacía de i caras «surge» sólo de los vértices con el grado $\geqslant i$; si el grado del vértice es igual a m, entonces existen exactamente $\binom{m}{i}$ intersecciones iguales a éste mismo. Por eso

$$q_3 = \binom{3}{3} V_3 + \binom{4}{3} V_4 + \ldots + \binom{n-1}{3} V_{n-1} + \binom{n}{3} V_n,$$

$$q_4 = \binom{4}{4} V_4 + \ldots + \binom{n-1}{4} V_{n-1} + \binom{n}{4} V_n,$$

. . . .

$$q_{n-1} = \binom{n-1}{n-1} V_{n-1} + \binom{n}{n-1} V_n,$$

$$q_n = \binom{n}{n} V_n.$$

Poniendo dichas expresiones en (10.13) y variando el orden de los sumandos, vemos que el primer miembro de (10.13) es igual a

$$\left[\binom{3}{0} - \binom{3}{1} + \binom{3}{2} - \binom{3}{3}\right] V_3 + \left[\binom{4}{0} - \binom{4}{1} + \binom{4}{2} - \binom{4}{3} + \binom{4}{4}\right] V_4 + \ldots$$
$$\ldots + \left[\binom{n-1}{0} - \binom{n-1}{1} + \ldots + (-1)^{n-1}\binom{n-1}{n-1}\right] V_{n-1} + \left[\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \ldots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1} + (-1)^n \binom{n}{n}\right] V_n.$$

A consecuencia de (10.4) cada paréntesis angular es igual a cero. La igualdad (10.13) está demostrada, luego lo está también la igualdad (10.11).

Sea M un polígono simple sobre el plano, partido en caras convexas. Demostremos la igualdad siguiente:

$$q_1 - q_2 + q_3 - \ldots + (-1)^{n-1}q_n = \mathrm{V}-\mathrm{A}+\mathrm{C}, \quad (10.14)$$

donde las designaciones tienen el mismo sentido que en la fórmula(10.11), pero respecto a una partición arbitraria M. La demostración se desarrolla por el mismo esquema. Notemos, no obstante, algunas diferencias.

Llamemos *grado* de un vértice de partición al número de aristas que salen de éste. Ahora los vértices (lo mismo que las aristas), a diferencia del caso de un poliedro, se dividen en interiores y de frontera. Supongamos que V^i designa el número total de vértices interiores; V_3^i, el número de vértices interiores con el grado 3, . . .; V_n^i, el número de vértices interiores con el máximo grado n. Entonces

$$\mathrm{V}^i = \mathrm{V}_3^i + \mathrm{V}_4^i + \ldots + \mathrm{V}_n^i =$$

$$= \binom{3}{0}\mathrm{V}_3^i + \binom{4}{0}\mathrm{V}_4^i + \ldots + \binom{n}{0}\mathrm{V}_n^i. \quad (10.15)$$

Además, sea V^e el número de todos los vértices de frontera; A^i y A^e, los números de aristas interiores y de frontera, respectivamente. Es evidente que

$$\mathrm{V} = \mathrm{V}^i + \mathrm{V}^e,\ \mathrm{A} = \mathrm{A}^i + \mathrm{A}^e,\ \mathrm{V}^e = \mathrm{A}^e. \quad (10.16)$$

Designemos también por V_3^e, . . ., V_n^e el número de vértices de frontera con grados iguales a 3, . . ., n, respectivamente.

Al igual que en el caso del poliedro, tenemos $q_1 = \mathrm{A}$. Sin embargo, ya en el cálculo de q_2 aparecen diferencias: primero, sólo las aristas interiores son las intersecciones de las caras, mientras que las de frontera no lo son; segundo, en el vértice de frontera de grado j ($j \geqslant 3$) convergen ahora $j-1$ caras, y no j. Por consiguiente, tal vértice de $\binom{j-1}{2}$ intersecciones pares no vacías de las caras; de éstas, $j-2$ intersecciones corresponden a las aristas interiores que salen de este vértice, y las demás, cuyo número es igual a $\binom{j-1}{2} - (j-2)$ son iguales al propio vértice. Por otro lado al iqual que antes, cada vértice interior v con el grado j da $\binom{j}{1}$intersecciones pares no vacías de las aristas, cada una de las cuales es igual a la

arista interior y $\binom{j}{2}-\binom{j}{1}$ intersecciones pares no vacías iguales al propio vértice v. Por eso

$$q_1-q_2=C-A^i-\left\{\left[\binom{3}{2}-\binom{3}{1}\right]V_3^i+\right.$$

$$+\left[\binom{4}{2}-\binom{4}{1}\right]V_4^i+\ldots+\left[\binom{n}{2}-\binom{n}{1}\right]V_n^i+$$

$$+\left[\binom{2}{2}-1\right]V_3^e+\left[\binom{3}{2}-2\right]V_4^e+\ldots+\left[\binom{n-1}{2}-\right.$$

$$\left.\left.-(n-2)\right]V_n^e\right\}. \qquad (10.17)$$

A partir de (10.16) se obtiene

$$C-A^i=(C-A+V)+A^e-V^e-V^e=$$
$$=(C-A+V)-V^i. \qquad (10.18)$$

Para terminar la demostración de la fórmula (10.14), en virtud de (10.17) y (10.18), basta con verificar que

$$V^i+\left[\binom{3}{2}-\binom{3}{1}\right]V_3^i+\ldots+\left[\binom{n}{2}-\binom{n}{1}\right]V_n^i+$$

$$+\left[\binom{2}{2}-1\right]V_3^e+\ldots+\left[\binom{n-1}{2}-(n-2)\right]V_n^e-$$

$$-q_3+q_4-\ldots+(-1)^n q_n=0. \qquad (10.19)$$

Para esta comprobación hallemos los números q_3, q_4, etc. Dado que las intersecciones triples no vacías de las caras «surgen» a partir de los vértices interiores con el grado $\geqslant 3$ y los vértices de frontera con el grado $\geqslant 4$, entonces

$$q_3=\binom{3}{3}V_3^i+\binom{4}{3}V_4^i+\ldots+\binom{n-1}{3}V_{n-1}^i+$$

$$+\binom{n}{3}V_n^i+\binom{3}{3}V_4^e+\ldots+\binom{n-2}{3}V_{n-1}^e+$$

$$+\binom{n-1}{3}V_n^e.$$

Análogamente,

$$q_4 =$$
$$= \binom{4}{4} V_4^i + \binom{5}{4} V_5^i + \ldots + \binom{n-1}{4} V_{n-1}^i + \binom{n}{4} V_n^i +$$
$$+ \binom{4}{4} V_5^e + \ldots + \binom{n-2}{4} V_{n-1}^e + \binom{n-1}{4} V_n^e,$$

. . . .

$$q_{n-1} = \binom{n-1}{n-1} V_{n-1}^i +$$
$$+ \binom{n}{n-1} V_n^i + \binom{n-1}{n-1} V_n^e$$

$$q_n = \binom{n}{n} V_n^i.$$

Considerando (10.15) y poniendo los números q_3, q_4, ..., q_n en el primer miembro de la igualdad (10.19) hallaremos, haciendo unas transformaciones simples, que dicho primer miembro tiene la forma siguiente:

$$\left[\binom{3}{0} - \binom{3}{1} + \binom{3}{2} - \binom{3}{3}\right] V_3^i + \left[\binom{4}{0} - \binom{4}{1} +\right.$$
$$\left. + \binom{4}{2} - \binom{4}{3} + \binom{4}{4}\right] V_4^i + \ldots + \left[\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \ldots\right.$$
$$\left. \ldots + (-1)^n \binom{n}{n}\right] V_n^i + \left[-1 + \binom{2}{2}\right] V_3^e +$$
$$+ \left[-2 + \binom{3}{2} - \binom{3}{3}\right] V_4^e + \ldots + \left[-(n-2) +\right.$$
$$\left. + \binom{n-1}{2} - \binom{n-1}{3} + \ldots + (-1)^{n-1} \binom{n-1}{n-1}\right] V_n^e.$$

Todos los coeficientes de los términos V_3^i, V_4^i, . . ., V_n^i son iguales a cero debido a la igualdad (10.4). En lo que respecta a los coeficientes de V_3^e, V_4^e, . . ., V_n^e, cada uno de éstos también es igual a cero. De esto nos convencemos más fácilmente con ayuda de la fórmula (10.6), si ésta

se escribe de la manera siguiente:

$$\binom{n}{2}-\binom{n}{3}+\binom{n}{4}-\ldots+(-1)^n\binom{n}{n}-\binom{n}{1}-1-$$
$$-n-1.$$

Por eso queda demostrada la igualdad (10.19), y, por tanto, también la fórmula (10.14).

PROBLEMA

27. Una figura es la unión de n polígonos convexos (en particular, de segmentos) $A_1, \ldots, A_n$, siendo $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \neq \varnothing$. Hállese la característica de Euler de dicha figura.

Ahora podemos dar otra demostración de la existencia de la característica de Euler sobre las clases de figuras elementales sobre la recta, el plano y en el espacio. Limitémonos, para simplificar, sólo con la primera de estas clases. En la demostración se utilizará el conocido *«principio de segmentos que se contraen»* siguiente: si la sucesión infinita de los segmentos $\{I_0, I_1, \ldots, I_n, \ldots\}$ sobre una recta es tal que cada segmento siguiente de ellos se encuentra en el anterior y sus longitudes tienden a cero, entonces todos estos segmentos tienen un único punto común. Dicho principio (o alguna otra afirmación equivalente) suele adoptarse por uno de los axiomas de la recta numérica.

Ahora bien: sea $A = \bigcup_{i=1}^{m} A_i$ una figura elemental sobre una recta, que es la unión de los segmentos A_i. Algunos de estos segmentos pueden degenerar en puntos. Llamemos *característica de Euler de la figura A* al número $\chi(A)$ ya determinado más arriba o por la fórmula (8.10):

$$\chi(A) = q_1 - q_2 + q_3 - \ldots + (-1)^{m-1} q_m. \qquad (8.10)$$

Demostremos que la función χ determinada por esta fórmula sobre la clase de figuras elementales satisface a los axiomas (α)—(γ) del § 8. Es necesario demostrar, al igual que antes, sólo la propiedad de aditividad. Notemos previamente que dicha propiedad se cumple para todas las figuras en cierta forma débil que ahora vamos a señalar. Supongamos que la figura A yace en el segmento

$I_0 = [a, b]$, partiéndolo el punto c en dos partes iguales. Introduzcamos las designaciones siguientes: $A^- = A \cap \cap [a, c]$, $A^+ = A \cap [c, b]$, $A^0 = A \cap \{c\}$. En otras palabras, A^- es parte de la figura A, que se encuentra en el segmento $[a, c]$; A^+, parte de la misma, que se encuentra en el segmento $[c, b]$, y A^0 es el punto c o una figura vacía, en función de si el punto c forma parte de A o no. La forma débil de la propiedad de aditividad mencionada más arriba tiene la forma siguiente:

$$\chi(A) = \chi(A^-) + \chi(A^+) - \chi(A^0). \quad (10.20)$$

Ésta se comprueba fácilmente partiendo de la determinación de la característica de Euler por la fórmula (8.10).

Ahora sea $B = \bigcup_{j=1}^{k} B_j$ otra figura elemental en el segmento $I_0 = [a, b]$ y, lo mismo que antes, el punto c lo parte en dos partes iguales. Tenemos que demostrar la igualdad

$$\chi(A \cup B) = \chi(A) + \chi(B) - \chi(A \cap B). \quad (10.21)$$

Suponiéndola válida para las figuras cualesquiera y utilizando (10.20) para las figuras A, B, $A \cup B$ y $A \cap B$, podemos volver a escribir la igualdad (10.21) de la manera siguiente:

$$\chi(A^- \cup B^-) + \chi(A^+ \cup B^+) - \chi(A^0 \cup B^0) =$$
$$= [\chi(A^-) + \chi(B^-) - \chi(A^- \cap B^-)] + [\chi(A^+) + \chi(B^+) -$$
$$- \chi(A^+ \cap B^+)] - [\chi(A^0) + \chi(B^0) - \chi(A^0 \cap B^0)].$$

Entonces, si se cumplen las tres igualdades siguientes:

$$\chi(A^- \cup B^-) = \chi(A^-) + \chi(B^-) - \chi(A^- \cap B^-), \quad (10.22)$$

$$\chi(A^+ \cup B^+) = \chi(A^+) + \chi(B^+) - \chi(A^+ \cap B^+), \quad (10.23)$$

$$\chi(A^0 \cup B^0) = \chi(A^0) + \chi(B^0) - \chi(A^0 \cap B^0), \quad (10.24)$$

es válida también la igualdad (10.21).

Supongamos lo contrario, es decir, sea que (10.21) es incorrecta. Dado que la igualdad (10.24) es válida siempre (lo que se comprueba con facilidad), es incorrecta por lo menos una de las igualdades (10.22) y (10.23); sea, para mayor precisión, la primera de ellas. Por tanto, la propiedad de aditividad resulta incorrecta para las figuras $A^- = A \cap I_1$ y $B^- = B \cap I_1$ que se encuentran en el segmento $I_1 = [a, c]$. Al partir dicho segmento por el

punto d en dos partes iguales, hallaremos tal segmento I_2 contenido en $[a, c]$, que para las figuras $A_2 = A \cap I_2$ y $B_2 = B \cap I_2$ que se encuentran sobre éste la propiedad de aditividad será incorrecta. Prosiguiendo así obtendremos una sucesión infinita de segmentos que se contraen $\{I_0, I_1, \ldots, I_n, \ldots\}$ tal que para las figuras $A_n = A \cap \cap I_n$ y $B_n = B \cap I_n$ que están sobre el segmento I_n se altera la propiedad de aditividad.

Sea x el único punto común de todos los segmentos I_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Las figuras $A_n = A \cap I_n$ y $B_n = B \cap I_n$ tienen la forma siguiente:

$$A_n = \bigcup_{i=1}^{m} (A_i \cap I_n), \quad B_n = \bigcup_{j=1}^{k} (B_j \cap I_n).$$

Si el número n se toma muy grande, entre los segmentos $A_i \cap I_n$ y $B_j \cap I_n$ serán no vacíos exactamente los que contienen el punto x. Esto quiere decir, a fuerza del problema 27, que para tales números n tenemos $\chi(A \cap I_n) = \chi(B \cap I_n) = 1$ si, por ejemplo, el punto x se contiene en $A \cap B$. Análogamente, $\chi[(A \cup B) \cap I_n] = \chi(A \cap \cap B \cap I_n) = 1$. De aquí se desprende que para las figuras $A \cap I_n$ y $B \cap I_n$ se cumple la propiedad de aditividad. La contradicción obtenida demuestra nuestra afirmación.

§ 11. FIGURAS ELEMENTALES SOBRE LA ESFERA Y SUS CARACTERÍSTICAS DE EULER

Sea S una esfera. Llámase *circunferencia mayor* sobre S a la línea de intersección de la esfera con un plano que pasa por su centro O (fig. 37, a). La circunferencia mayor divide la esfera en dos *semiesferas*; vamos a suponer que ella misma se contiene en cada una de éstas. Llámase *polígono convexo* sobre S a la intersección de un número finito de semiesferas (fig. 37, b, c). Así pues, los polígonos convexos sobre la esfera se determinan igualmente que sobre el plano, pero el papel de las rectas lo juegan aquí las circunferencias mayores, y el de los semiplanos, las semiesferas.

A diferencia del plano, donde el triángulo es el polígono con el número mínimo de lados, en la esfera hay polígonos convexos con un número de lados menor que tres

denominados lúnulas. La *lúnula* es la intersección de dos semiesferas cuyas circunferencias mayores de frontera no coinciden (fig. 38). La circunferencia mayor también es un polígono convexo, puesto que es la intersección de

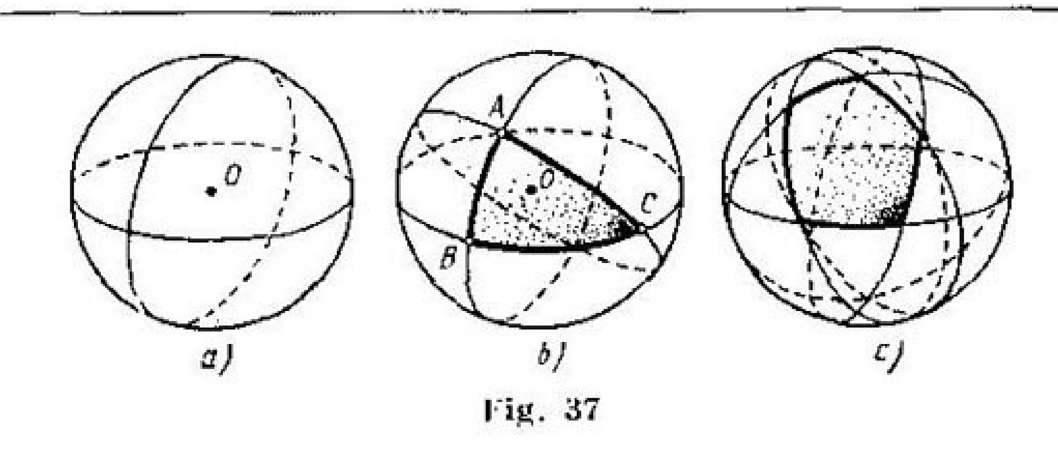


Fig. 37

dos semiesferas (que la determinan). Por fin, entre los polígonos convexos sobre S figuran pares de *puntos antípodas*, es decir, pares de puntos que son los extremos de

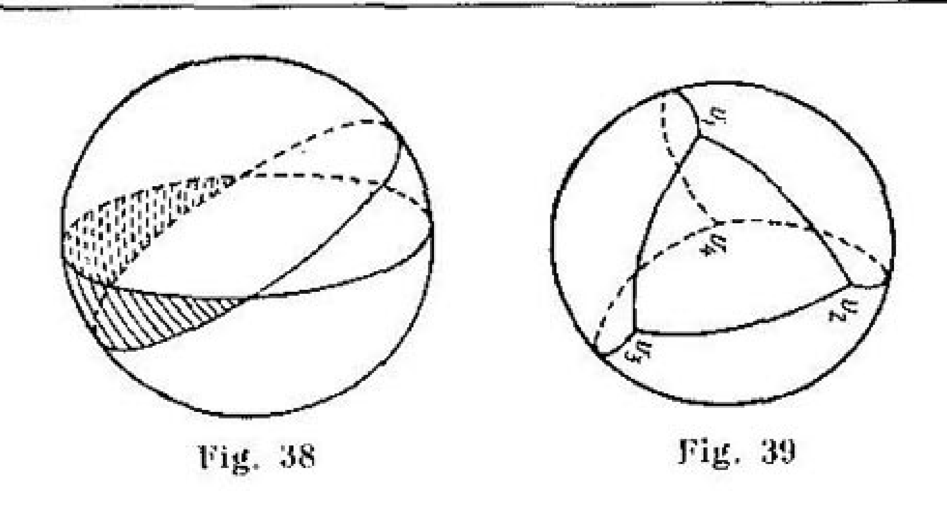


Fig. 38 Fig. 39

un mismo diámetro de la esfera. Efectivamente, un par de antípodas es la intersección de dos circunferencias mayores y, por tanto, la intersección de cuatro semiesferas.

Un polígono convexo sobre la esfera se denomina *estrictamente convexo*, si no contiene ni un solo par de antípodas; tales son, por ejemplo, el triángulo y el pentágono de la fig. 37. Y a la inversa: la lúnula no es estricta-

mente convexa, puesto que contiene un par (único) de antípodas, esto son sus vértices. Un polígono convexo se denomina *degenerado* si se encuentra en la circunferencia mayor (en particular, coincide con ésta).

Llámase *figura elemental* sobre la esfera a la unión de un número finito de polígonos *estrictamente convexos*, posiblemente, degenerados. Designemos a esta clase de figuras por $\mathscr{M}(S)$. Es fácil ver que la clase $\mathscr{M}(S)$ está integrada por *todos* los polígonos convexos (por ejemplo, la semiesfera, la lúnula, el par de antípodas), y no solamente los estrictamente convexos. Es importante señalar que también la propia esfera S integra dicha clase. Efectivamente, sean v_1, v_2, v_3 y v_4 los vértices de un tetraedro inscrito en S tal que el centro de la esfera se encuentra dentro de él (fig. 39). Consideremos sobre la esfera cuatro triángulos, a saber: A_1 con los vértices v_2, v_3, v_4; A_2 con los vértices v_1, v_3, v_4; A_3 con los vértices v_1, v_2, v_4 y A_4 con los vértices v_1, v_2, v_3. Está claro que todos estos triángulos son estrictamente convexos y, además,

$$S = \bigcup_{i=1}^{4} A_i. \qquad (11.1)$$

Sea C la circunferencia mayor de la esfera. Llámase *figura elemental* sobre la circunferencia C a la unión de un número finito de arcos cuyas longitudes son menores que la longitud de una semicircunferencia. Llamaremos *cortos* a estos arcos. En particular, la propia circunferencia puede representarse en forma de la unión de tres arcos cortos, cada dos de los cuales tienen un extremo común:

$$C = \bigcup_{i=1}^{3} B_i. \qquad (11.2)$$

Sea $\mathscr{M}(C)$ la clase de todas las figuras elementales sobre la circunferencia.

La característica de Euler para las clases $\mathscr{M}(S)$ y $\mathscr{M}(C)$ se determina con ayuda de los axiomas (α), (β) y (γ) del § 8. No obstante, a diferencia del caso del plano, el axioma (β) ahora reza así:

(β) para cada polígono *estrictamente convexo* no vacío (incluso el degenerado) A sobre la esfera S se tiene $\chi(A) = 1$.

En particular, para cada arco corto no vacío B de la circunferencia mayor C se tiene $\chi(B) = 1$.

Ahora se comprende por qué la igualdad $\chi(A) = 1$ debe cumplirse sólo para los polígonos estrictamente convexos (y no para todos los convexos): es que entre los polígonos convexos figura, por ejemplo, un par de antípodas, pero es natural considerar que su característica de Euler es el número 2 y no 1.

La demostración de la existencia de la característica de Euler sobre la clase $\mathcal{M}(C)$ se efectúa análogamente a como se ha hecho para la clase de figuras elementales sobre la recta, pero con una diferencia, a saber: es fácil comprobar que toda figura elemental M sobre la circunferencia C es igual a la unión de un número finito de arcos (no obligatoriamente cortos) de dicha circunferencia que de dos en dos no tienen puntos comunes y llamados, como de costumbre, componentes de la figura M, o bien coincide con la circunferencia C. En el primer caso suponemos $\chi(M)$ igual al número de componentes de la figura M. En el segundo debemos considerar que $\chi(M) = \chi(C) = 0$, puesto que dicha igualdad se desprende necesariamente de los axiomas de la característica de Euler, su unicidad y la representación (11.2). Efectivamente,

$$\chi(C) = \sum^{(1)} \chi(B_i) - \sum^{(2)} \chi(B_{i_1} \cap B_{i_2}) + \\ + \chi(B_1 \cap B_2 \cap B_3) - 3 - 3 + 0 = 0.$$

Se comprueba, igualmente que en el § 9, que en este caso se cumplen los axiomas (α) — (γ).

La demostración de la existencia de la característica de Euler sobre la clase $\mathcal{M}(S)$ se efectúa análogamente a como se ha hecho para la clase de figuras elementales sobre el plano, es decir, empleando el método de circunferencia mayor «giratoria»; sin embargo, en este caso también existen ciertas diferencias. Sea

$$M = \bigcup_{j=1}^{n} A_j$$

una figura elemental de la clase $\mathcal{M}(S)$, o sea la unión de polígonos estrictamente convexos A_j sobre la esfera. Entre éstos pueden figurar los degenerados, es decir, los arcos cortos o los puntos. Deben diferenciarse los dos casos siguientes: $M = S$ y $M \neq S$. En el primer caso hay que considerar $\chi(M) = \chi(S) = 2$, lo que se desprende necesariamente de los axiomas de la característica

de Euler, su unicidad y la representación (11.1):

$$\chi(S)=\sum^{(1)}\chi(A_j)-\sum^{(2)}\chi(A_{j_1}\cap A_{j_2})+$$
$$+\sum^{(3)}\chi(A_{j_1}\cap A_{j_2}\cap A_{j_3})-\chi(A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4)=$$
$$=4-6+4-0=2.$$

Tomemos en el segundo caso un par de puntos antípodas N_1 y N_2 diferentes de todos los vértices de la figura M. Llamemos a los puntos N_1 y N_2 «polos» (digamos, «polo Norte» y «polo Sur»). Elijamos la circunferencia mayor C_0 de tal manera que pase por los polos sin pasar por los vértices de la figura M (que en total dan un número finito). Supongamos, por ejemplo, que C_0 consta del «meridiano Greenwich» y la «línea de cambio de fechas». Sea C la circunferencia mayor que pasa por los polos y «gira», digamos, de «oeste» a «este» a partir de la posición inicial C_0 hasta la posición final, también C_0 (pero de tal manera que el «meridiano Greenwich» y la «línea de cambio de fechas» se cambien de lugar).

Pongamos

$$\chi(M)=\chi(M\cap N_1)+\chi(M\cap N_2)+\sum_{i=1}^{m}[\chi(M\cap C_i)-$$
$$-\chi(M\cap C_{i-0})]. \qquad (11.3)$$

Aquí C_i designa la posición de la circunferencia giratoria en el momento cuando ésta pasa por cierto vértice v_i de la figura M, mientras que C_{i-0} está situada un poco «más hacia oeste» que C_i. Se puede demostrar, al igual que en el § 9, que la función χ de la figura M, determinada por la igualdad (11.3) satisface los axiomas de la característica euleriana. Además, no es obligatorio exigir que la circunferencia C encuentre en cada una de sus posiciones un solo vértice de la figura M.

PROBLEMAS

28. Un balón de fútbol se cose, por regla general, de unos pedazos de cuero de dos tipos: pentagonales y hexagonales (los cuales, además de la forma, difieren también en color). ¿Es posible coser una pelota sólo de pedazos de cuero hexagonales?

29. En una esfera hay n ($n\geqslant 3$) circunferencias mayores que no pasan por un par de puntos *antípodas*. ¿Se hallaría sobre la esfera un punto que se encuentra exactamente en dos de estas circunferencias?

§ 12. APLICACIONES SUCESIVAS DE LA CARACTERÍSTICA DE EULER

En el párrafo presente se utilizará la fórmula

$$\chi (M) = c (M) - c^* (M) + 1 \qquad (12.1)$$

para los polígonos M sobre el plano o la esfera. Recordemos que $c (M)$ designa el número de componentes de la figura M, y $c^* (M)$, el número de componentes de su complemento respecto al plano o la esfera.

Notemos primeramente, sin demostrar, que cualquier polígono B puede representarse de una manera única en forma de la unión

$$B = \bigcup_{i=1}^{m} A_i \qquad (12.2)$$

de tales polígonos A_i cada uno de los cuales es simple o tiene sólo huecos simples con la particularidad de que la intersección de cada par $A_i \cap A_j$ consta de un punto o es vacía.

Por ejemplo, el polígono *c*) (fig. 8 en la p. 20) consta de tres triángulos; el polígono *f*), de dos triángulos y un polígono con dos huecos simples, y el polígono *g*), de tres polígonos simples y un polígono con tres huecos simples.

La unicidad de la representación (12.2) se garantiza, como regla, sólo por la restricción antes señalada sobre las intersecciones de los pares $A_i \cap A_j$. Efectivamente, el polígono *e*) de la fig. 8 puede considerarse como una unión de tres simples, de los cuales, sin embargo, cada dos tienen dos puntos comunes; por otro lado, el mismo polígono *e*) puede considerarse, según la representación (12.2), su único «sumando» que tiene tres huecos simples.

Pasamos a la demostración de la igualdad (12.1). Supongamos que al principio el polígono B no tiene huecos. Demostremos que entonces $\chi (B) = 1$. En efecto, según la representación (12.2) los «sumandos» A_i pueden situarse en tal orden que todas las figuras

$$B_1 = A_1,\ B_2 = A_1 \cup A_2,\ B_3 = \bigcup_{i=1}^{3} A_i,\ \ldots,\ B = B_m = \bigcup_{i=1}^{m} A_i$$

sean conexas (fig. 40). Entonces para todos los números i la intersección $B_{i-1} \cap A_i$ consta de un punto, puesto que en caso contrario el polígono B_i tendría huecos (fig. 41). Por eso

$$\chi(B_1) - \chi(A_1) = 1,$$
$$\chi(B_2) - \chi(A_1) + \chi(A_2) - \chi(A_1 \cap A_2) = 1 + 1 - 1 = 1,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\chi(B) = \chi(B_{m-1}) + \chi(A_m) - \chi(B_{m-1} \cap A_m) = 1 + 1 - 1 = 1.$$

Por otro lado, para el polígono sin huecos tenemos $c(B) = c^*(B) = 1$ y, por tanto, (12.1) tiene validez.

Pongamos que ahora el polígono M tiene n huecos $C_1, \dots, C_n$ y todos ellos son simples. Demostremos la

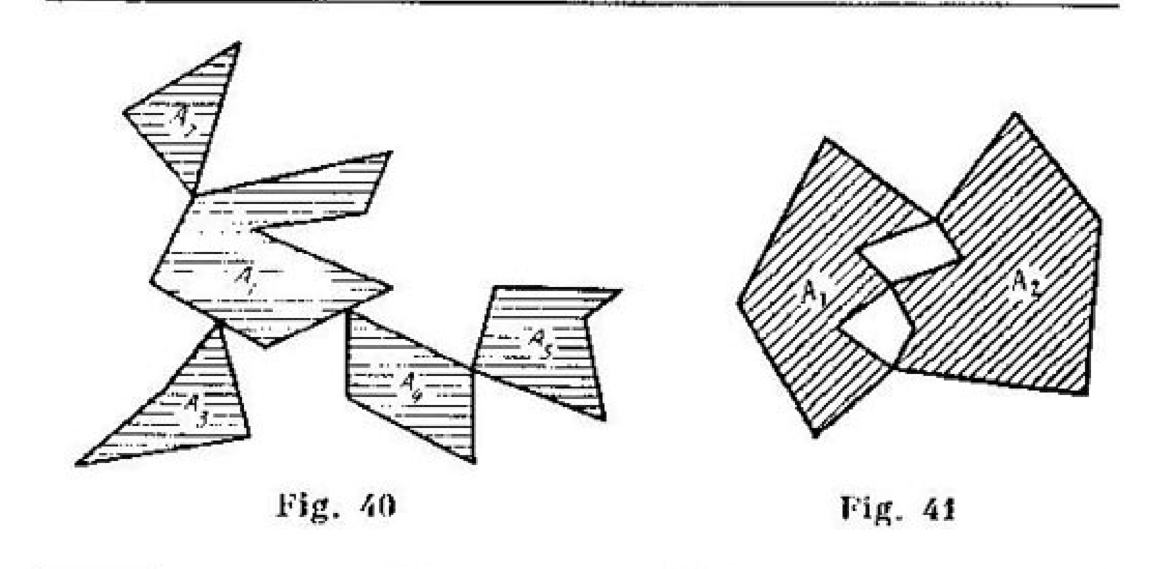


Fig. 40 Fig. 41

igualdad (12.1) por inducción en función del número de huecos.

Sea M_0 el polígono obtenido a partir de M «encolando» todos los huecos. Como sabemos, la igualdad (12.1) es correcta para M_0. Sea M_1 un polígono obtenido a partir de M_0 «recortando» el hueco C_1; M_2, un polígono obtenido a partir de M_1 recortando el hueco C_2, etc.; $M_n = M$, un polígono obtenido a partir de M_{n-1} recortando el agujero C_n. Está claro que

$$c(M_1) = c(M_2) = \dots = c(M_n) = 1,$$
$$c^*(M_1) = 2,\ c^*(M_2) = 3,\ \dots,\ c^*(M_n) =$$
$$= c^*(M) = n + 1.$$

Supongamos que la igualdad (12.1) es válida para el polígono M_{n-1}, es decir, sea

$$\chi(M_{n-1}) = c(M_{n-1}) - c^*(M_{n-1}) + 1 = 1 - n + \\ + 1 = 2 - n.$$

Demostremos una igualdad análoga para $M_n = M$. Tenemos $M_{n-1} = M_n \cup C_n$, de donde $\chi(M_{n-1}) = \chi(M_n) + \chi(C_n)$. Además, de acuerdo con el corolario del teorema 1, $\chi(C_n) = 1$. Por eso

$$\chi(M_n) = \chi(M_{n-1}) - \chi(C_n) = 2 - n - 1 = 1 - n.$$

Por otro lado,

$$c(M_n) - c^*(M_n) + 1 = 1 - n - 1 + 1 = 1 - n.$$

Así pues, la igualdad (12.1) está demostrada para un polígono que tiene sólo huecos simples.

Para el caso más general, dicha igualdad se obtiene a partir de la propiedad de aditividad de la característica de Euler y la representación (12.2). Notemos que ésta se demuestra también de la misma manera para la esfera; en este caso sólo debe considerarse que, a diferencia del caso del plano, al encolar los huecos puede obtenerse una figura que coincide con toda la esfera.

El empleo de la característica de Euler es especialmente cómodo si se trata del enlace entre las propiedades de recubrimiento de una figura (por ejemplo, una esfera) por una familia de polígonos convexos y las propiedades de intersección de dicha familia de recubrimiento. Se dice que la familia $\{A_1, \ldots, A_n\}$ de polígonos convexos *cubre* la esfera S si

$$S = \bigcup_{i=1}^{n} A_i.$$

TEOREMA 3 *Sean A_1, A_2, A_3, A_4 los polígonos estrictamente convexos no degenerados sobre la esfera S. Entonces son equivalentes las afirmaciones siguientes:*

(a) *dichos polígonos cubren la esfera;*

(b) *la intersección de los cuatro polígonos es vacía, mientras que la intersección de cada tres de ellos no es vacía.*

Formulemos otra proposición análoga para el caso de la circunferencia mayor (en vez de la esfera).

TEOREMA 4 *Sean A_1, A_2, A_3 los arcos cortos sobre la circunferencia mayor C. Entonces son equivalentes las afirmaciones siguientes:*

(a) *dichos arcos cubren la circunferencia;*

(b) *la intersección de los tres arcos es vacía, mientras que la intersección de cada dos de ellos no lo es.*

Demostraremos el teorema 3 utilizado el teorema 4 como *lema*. Puesto que los teoremas 3 y 4 se demuestran análogamente, la demostración del 4 puede ofrecerse al lector.

DEMOSTRACIÓN. Demostremos que (b) se desprende de (a). Sea que los cuatro polígonos cubren la esfera. Entonces está claro que sobre una esfera no puede existir un punto que pertenezca a todos estos polígonos: si tal punto existiera, su antípoda no pertenecería a ninguno de los polígonos debido a su convexidad estricta, lo que contradice al enunciado. Demostremos que cada tres polígonos entre los cuatro dados tienen un punto común. Con este propósito tomemos el polígono A_4 y tracemos sobre la esfera una circunferencia mayor C que no tiene puntos comunes con A_4. Podemos convencernos de la existencia de tal circunferencia de la manera siguiente. El polígono A_4 equivale a la intersección de cierto número de semiesferas. Si entre dichas semiesferas se escogen sólo dos, su intersección será la lúnula D. Tracemos la circunferencia mayor C' que tiene sólo dos puntos comunes con la lúnula D: sus vértices son v y v'. Para obtener A_4 a partir de D, es necesario «cortar» de ésta ciertos pedazos; en particular, en este caso será cortado por lo menos uno de los vértices v o v'. Pero entonces con un pequeño giro de la circunferencia C' se puede lograr que ésta deje de tener puntos comunes con A_4.

Así pues, existe una circunferencia mayor C tal que $C \cap A_4 = \varnothing$. En este caso la circunferencia C se cubre con tres conjuntos $A_1 \cap C$, $A_2 \cap C$ y $A_3 \cap C$ que son arcos cortos. Según el teorema 4, cada dos de estos tres arcos tienen un punto común; luego que cada par de los tres polígonos A_1, A_2 y A_3 también tiene un punto común. Puesto que en vez del polígono A_4 se podría tomar cualquier otro, dos polígonos cualesquiera de los cuatro tienen una intersección no vacía. Por eso $\chi(A_i \cap A_j) = 1$ para todos $i, j = 1, 2, 3, 4$. Ahora, valiéndonos de la igualdad $S = \bigcup_{i=1}^{4} A_i$ y la fórmula (8.10) obtenemos

$$2 = \chi(S) = q_1 - q_2 + q_3 - q_4 = \binom{4}{1} - \binom{4}{2} + q_3 - 0,$$

de donde $q_3 = 4$. Esto quiere decir que *cada* terna de polígonos tomada del conjunto $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ tiene una intersección no vacía, puesto que en total hay exactamente 4 ternas de este tipo. Conque hemos demostrado que de (a) se desprende (b).

Demostremos ahora que de (b) se infiere (a). Supongamos que ahora se cumple la afirmación (b). Pongamos $A = \bigcup_{i=1}^{4} A_i$, entonces

$$\chi(A) = q_1 - q_2 + q_3 - q_4 = \binom{4}{1} - \binom{4}{2} + \binom{4}{3} - 0 = 2.$$

La figura A es conexa, luego $c(A) = 1$. Aplicando para dicha figura la fórmula (12.1), válida también para la esfera, obtenemos $c^*(A) = 0$, lo cual significa que A cubre la esfera S. El teorema 3 está demostrado.

COROLARIO. *El número mínimo de polígonos estrictamente convexos que cubren una esfera es igual a 4.*

DEMOSTRACIÓN. En rigor, la igualdad (11.1) muestra que existen cuatro triángulos estrictamente convexos que cubren la esfera. Por otro lado, si la cubren tres polígonos estrictamente convexos A_1, A_2 y A_3, los cuatro polígonos A_1, A_2, A_3 y A_4 la cubrirán también. Entonces, según el teorema 3, la intersección $\bigcap_{i=1}^{3} A_i$ no es vacía, lo cual contradice al mismo teorema.

TEOREMA 5. *Sean A_1, A_2 y A_3 unas lúnulas sobre la esfera S. Entonces son equivalentes las afirmaciones siguientes:*

(a) *estas lúnulas cubren la esfera;*

(b) *la intersección de las tres lúnulas es igual a un par de antípodas, mientras que la intersección de cada dos de ellas no es vacía y difiere del par de antípodas.*

DEMOSTRACIÓN. Señalemos primeramente que la característica de Euler de la lúnula, así como la de cualquier polígono convexo no vacío contenido en ésta, y diferente del par de antípodas, es igual a 1 (¡compruébese esto!).

Demostremos que de (a) se desprende (b). Supongamos que las lúnulas A_1, A_2 y A_3 cubren la esfera S, y que $A_1 \cap A_2 = \varnothing$. Designemos por v y v' los vértices de la lúnula A_1, y por w y w' los de la lúnula A_2. Según la suposición, los cuatro puntos v, v', w y w' son diferentes. Por eso por ellos puede trazarse sobre S la única circunferencia mayor C (fig. 42). Entonces la intersección $A_1 \cap C$

consta sólo de dos puntos v y v'. Efectivamente, en caso contrario $A_1 \cap C$ contendría la mitad de la circunferencia C, pero sobre esta mitad se encuentra uno de los vértices w y w', el cual, por tanto, pertenecería a A_1, lo cual es imposible. Así pues, hemos demostrado que $A_1 \cap A_2 = \varnothing$. De la misma manera se comprueba que la intersección de cada par de lúnulas no es vacía. Mostremos además que dicha intersección difiere del par de antípodas.

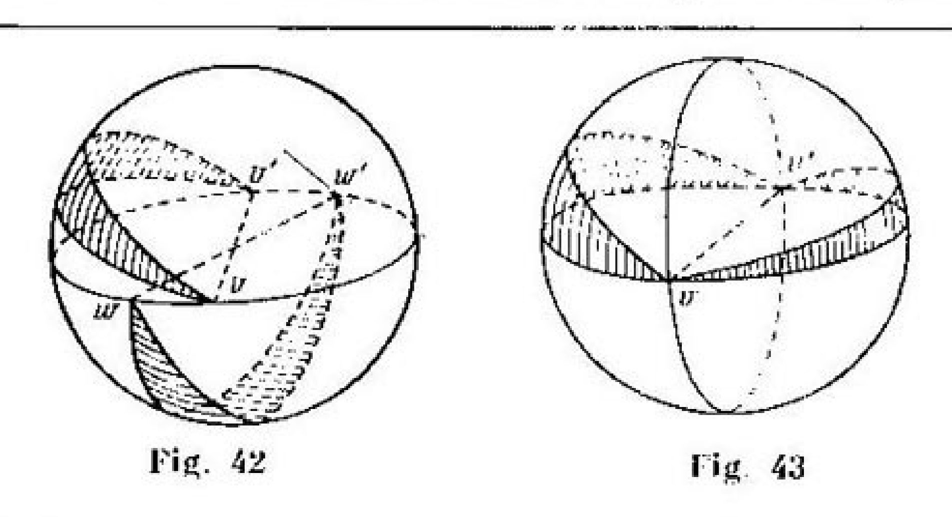


Fig. 42 Fig. 43

Supongamos que, a la inversa, $A_1 \cap A_2 = \{v, v'\} = \{w, w'\}$. En tal caso es posible trazar sobre S una circunferencia mayor que interseca con cada una de las lúnulas A_1 y A_2 sólo en sus vértices v y v' (ifg. 43). Pero entonces todos los puntos de dicha circunferencia, menos v y v', deben pertenecer a A_3, lo cual es imposible.

Así pues, si las lúnulas A_1, A_2 y A_3 cubren la esfera, la intersección de cada dos de ellas no es vacía y difiere del par de antípodas, siendo por eso su característica de Euler igual a 1. Ahora tenemos

$$2 = \chi(S) = \chi\left(\bigcup_{i=1}^{3} A_i\right) = \sum^{(1)} \chi(A_i) - \\ - \sum^{(2)} \chi(A_{i_1} \cap A_{i_2}) + \chi(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \\ = 3 - 3 + \chi(A_1 \cap A_2 \cap A_3).$$

De aquí $\chi(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 2$ y, por tanto, dicha intersección es un par de antípodas. Con esto queda demostrado que (b) se desprende de (a).

Demostremos ahora que (a) se infiere de (b).

Supongamos que está cumplida la afirmación (b).

Pongamos $A = \bigcup_{i=1}^{3} A_i$, entonces

$$\chi(A) = \sum^{(1)} \chi(A_i) - \sum^{(2)} \chi(A_{i_1} \cap A_{i_2}) + \\ + \chi(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 3 - 3 + 2 = 2.$$

La figura A es conexa, luego $c(A) = 1$. Entonces obtenemos, a partir de la fórmula (12.1), que $c^*(A) = 0$. Por tanto, A cubre la esfera S. El teorema 5 está demostrado.

COROLARIO *El número mínimo de lúnulas que cubren una esfera es igual a 3.*

PROBLEMAS

30. Dese un ejemplo de figura elemental en el espacio, para la cual la fórmula (12.1) no es correcta.

31. Sean A_1, A_2 y A_3 unos polígonos convexos sobre el plano, cada dos de los cuales tienen una intersección no vacía. Demuéstrese que si su unión es convexa, la intersección de los tres no es vacía.

32. Sean A_1, A_2, A_3 y A_4 tales polígonos convexos sobre el plano que cada tres de ellos tienen un punto común. Demuéstrese, utilizando la igualdad (12.1), que todos los polígonos tienen un punto común.

La afirmación de dicho problema es el caso particular del teorema demostrado en el año 1913 por el matemático austriaco E. Helly (1884—1943) (véase el libro [2]).

33. Supongamos que están dados cuatro polígonos convexos sobre el plano, siendo no vacía la intersección de cada dos de ellos, mientras que la unión de cada tres tiene un complemento conexo respecto al plano. Demuéstrese que todos los polígonos tienen un punto común.

34. Demuéstrese la fórmula (12.1) para una figura plana igual a la unión de un número finito de segmentos.

35. Sean $A_1, \ldots, A_n$ tales segmentos sobre el plano que la intersección de cada dos de ellos no es vacía, y la intersección de cada tres lo es. ¿En cuántas partes dividen el plano?

36. Sea A una figura plana igual a la unión de n segmentos. Demuéstrese que

$$\frac{n(3-n)}{2} \leqslant \chi(A) \leqslant n.$$

37. Supongamos que sobre una esfera hay cinco polígonos estrictamente convexos, cada tres de los cuales tienen una intersección no vacía. Demuéstrese que algunos cuatro de ellos también tienen una intersección no vacía.

38. Demuéstrese que entre cinco (o más) polígonos estrictamente convexos cualesquiera existen sobre la esfera tales cuatro que no cubren la esfera.

39. Supongamos que el segmento A está cubierto por segmentos «pequeños» $A_1, \ldots, A_n$ de manera que cada punto del segmento A pertenece a un número impar de segmentos pequeños. Demuéstrese que el número n es impar.

Valiéndose de esto, demuéstrese que si la figura B que se encuentra sobre una recta, está cubierta por cierto número n de segmentos, perteneciendo cada uno de los puntos de dicha recta a un número impar de segmentos, entonces la diferencia $n - \chi(B)$ es par.

40. Supongamos que una circunferencia está cubierta por cierto número finito de arcos cortos, de modo que cada uno de los puntos de esta circunferencia pertenece a un número impar de arcos. Demuéstrese que el número total de arcos es par.

SOLUCIONES, INDICACIONES, RESPUESTAS

1. Súmese 2V a ambos miembros de la igualdad A — V = 1.

2. Súmese 2A a ambos miembros de la igualdad V — A + + C = 1.

3. Trácese una recta con el número i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ por los puntos del plano con coordenadas cartesianas $(i, 0)$ y $(0, n - i)$. Hállense las coordenadas del punto de intersección de cada par de rectas. Dedúzcase, a partir de aquí, que dichos puntos son diferentes para distintos pares de rectas.

4. Puesto que cada dos rectas tienen un punto común, $V = \frac{n(n-1)}{2}$. Está claro que el grado de cada vértice es igual a 2. Por eso obtenemos de las fórmulas (1.3) y (1.4):

$$A = n + \frac{n(n-1)}{2}\ 2 = n^2,$$

$$C = 1 + n - \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2}\ 2 = 1 + n + \frac{n(n-1)}{2}.$$

5. Señalemos que variaciones aparecen en la demostración de la fórmula (1.2) si, por ejemplo, la recta L_1 de la familia es horizontal. Supongamos que sobre ésta se encuentran m vértices de partición $A_1, \ldots, A_m$ con grados $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$. Hallemos el número de nuevos vértices, aristas y caras que «surgen» al pasar la recta móvil por L_1. Está claro que el número de nuevos vértices es igual a m; son los puntos $A_1, \ldots, A_m$. El número de nuevas aristas es igual a $(m + 1) + (\alpha_1 - 1) + \ldots + (\alpha_m - 1)$; entre éstas, $m + 1$ aristas se encuentran sobre la recta L_1, $\alpha_1 - 1$ aristas tienen el punto A_1 por su extremo inferior y $\alpha_2 - 1$ aristas tienen el punto A_2 por su extremo inferior, etc. El número de nuevas caras es igual a $(m + 1) + (\alpha_1 - 2) + \ldots + (\alpha_m - 2)$; entre éstas, $m + 1$ caras hacen contacto con la recta L_1 mediante sus aristas, $\alpha_1 - 2$ caras tienen el punto A_1 como su vértice inferior, $\alpha_2 - 2$ caras tienen el punto A_2 como su vértice inferior, etc. Por eso la variación de la suma V — A + C de signo variable al pasar la recta móvil por L_1 es igual a

$$m - [(m + 1) + (\alpha_1 - 1) + \ldots + (\alpha_m - 1)] + \\ + [(m + 1) + (\alpha_1 - 2) + \ldots + (\alpha_m - 2)] = 0.$$

En lo demás la demostración no varía.

6. Pongamos que la familia tiene n rectas. Si $n = 1$, V = 0, A = 1, C = 2, por eso V — A + C = 1, y que dicha fórmula está demostrada para todas las familias que constan de $n - 1$ rectas de posición general. Añadamos a tal familia una nueva recta L. Por cuanto ésta interseca con las demás rectas, el número de nuevos vértices es igual a $n - 1$. El número de nuevas aristas es igual a $n + (n - 1)$ (entre éstas, n se encuentran sobre la recta L, las demás $n - 1$ se encuentran una sobre cada una de las rectas restantes). Puesto que la recta L se parte por las demás rectas en n

partes, ésta interseca n caras viejas partiendo cada una de ellas en dos partes. Luego el número de caras nuevas es igual a n. Por eso, al añadir la recta L, la variación de la suma V — A + C será igual a $(n-1)-[n+(n-1)]+n=0$.

7. Si la partición del plano está formada por una familia de n rectas y tiene vértices, cada recta de dicha familia interseca con alguna otra. Por eso en cada recta hay dos rayos, o sea aristas no limitadas. En otras palabras, $A_2 = 2n$. Tracemos sobre el plano una circunferencia de radio tan grande que todas las caras y aristas limitadas estén dentro de ésta. Entonces, al trasladarnos por dicha circunferencia vamos a encontrar alternativamente las caras y las aristas no limitadas. Esto quiere decir que $C_2 = 2n$. A partir de las fórmula (1.3) y (1.4) obtenemos

$$A_1 = A - A_2 = -n + \sum_{i=1}^{V} \alpha_i, \quad C_1 = C - C_2 =$$

$$= 1 - n - V + \sum_{i=1}^{V} \alpha_i.$$

De aquí se desprende directamente la fórmula $V - A_1 + C_1 = 1$.

8. La partición de un plano efectuada por una familia de rectas tiene caras limitadas si, y sólo si, la familia contiene una terna de rectas de posición general o una cuaterna de rectas que son las prolongaciones de los lados del paralelogramo. Las aristas limitadas existen si, y sólo si, la familia contiene una terna de rectas de posición general o una terna de rectas que son las prolongaciones de tres lados del paralelogramo.

9. Sean x e y dos puntos de M, cuando x pertenece a la cara limitada M_1 e y, a la cara limitada M_2. Ambas caras son polígonos convexos. Dado que M_1 y M_2 son limitadas, se encontrarán tales rectas L_1 y L_2 *que se intersecan* para las cuales L_1 es la prolongación de cierto lado M_1 y L_2, la prolongación del lado M_2. Si el punto x está *dentro* de M_1, bajemos de ésto una perpendicular sobre uno de los lados de M_1, y análogamente para y. Ahora es fácil construir la quebrada que une los puntos x e y: ésta consta de los segmentos de las perpendiculares señaladas, ciertas partes de las fronteras de M_1 y M_2 y dos segmentos que pertenecen a las rectas L_1 y L_2, respectivamente. Así pues, la figura M es conexa y es por eso un polígono.

La frontera de la figura M es la quebrada cerrada N. Numeremos sus vértices como $A_1, \ldots, A_n$, eligiendo arbitrariamente el sentido del recorrido. Pongamos que N tiene un punto de autointersección, es decir, supongamos, por ejemplo, que $A_1 = A_m = A_n$, donde $1 < m < n$. Puede considerarse que $3 \leqslant m \leqslant n-2$, y que m es el menor de los números k $(3 \leqslant k \leqslant m-2)$, para los cuales $A_k = A_n$. Entonces $A_1A_2 \ldots A_{m-1}A_m$ es el contorno que delimita el polígono simple M_1 contenido en M. Supongamos además que los tres puntos $A_{m-1}, A_1 = A_m, A_{m+1}$ se encuentran sobre una misma recta según el orden señalado, y análogamente para los puntos $A_{n-1}, A_n = A_1, A_2$.

Demostremos por reducción al absurdo que $m = 4 = n - 3$. Supongamos, por ejemplo, que $m > 4$. Entonces existen dos rectas de la familia que no pasan por A_1, a saber: la recta L_1 que pasa por

A_2 y la recta L_2 que pasa por A_{m-1}. Consideremos además la recta de la familia L_3 que pasa por A_{m+1}, pero no por A_1. Ella se interseca por lo menos con una de las rectas L_1 y L_2; supongamos que lo hace con L_1 en el punto A. La quebrada cerrada $A_1A_2AA_{m+1}A_1$ delimita cierto polígono M_2 que pertenece a M. Examinemos los ángulos $A_2A_1A_{m-1}$ y $A_2A_1A_{m+1}$. Son ángulos interiores para los polígonos M_1 y M_2, respectivamente, y adyacentes entre sí. Por eso el segmento A_1A_2 se interseca con la parte interior del polígono M, lo cual es imposible. Ahora bien: $m = 4$ y, análogamente, $n - 3 = 4$, es decir, $n = 7$. En este caso las rectas A_2A_3 y A_5A_6 son paralelas, puesto que en caso contrario, designándolas por L_1 y L_3, se podría repetir el razonamiento.

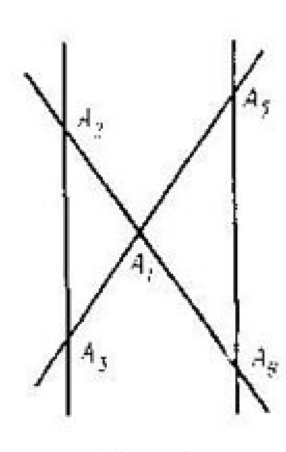


Fig. 44

Por tanto, si la frontera de M tiene un punto de autointersección, entonces el propio M tendrá el aspecto representado en la fig. 44, donde $A_1 = A_4 = A_7$. Notemos que los triángulos $A_1A_2A_3$ y $A_1A_5A_6$ no obligatoriamente son caras de partición, puesto que en la familia pueden existir rectas paralelas a A_2A_3 y A_5A_6 y situadas entre éstas.

11. Demostramos por reducción al absurdo: supongamos que todos los ángulos de las caras $<2\pi/5$. Entonces todas las caras son triángulos, puesto que para $n \geqslant 4$ el mayor ángulo del n-ágono no es menor que $\frac{(n-2)\pi}{n} \geqslant \frac{\pi}{2}$. Sea C el número total de caras y A_1, el número de aristas interiores. Puesto que todas las caras son triángulos, entonces

$$C \leqslant \frac{2}{3} A_1. \qquad (S.1)$$

De la suposición se desprende que a cada vértice interior le son adyacentes $\geqslant 6$ aristas. Por eso, si V_1 es el número de aristas interiores, entonces

$$V_1 \leqslant \frac{2}{6} A_1 = \frac{1}{3} A_1. \qquad (S.2)$$

A partir de la fórmula de Euler $(V_1 + 5) - (A_1 + 5) + C = 1$, así como de las desigualdades (S.1) y (S.2) obtenemos que

$$\frac{1}{3} A_1 - A_1 + \frac{2}{3} A_1 \geqslant 1,$$

lo cual es imposible.

13. Si el grafo completo con cinco vértices encaja en el plano, entonces en el plano se obtiene un polígono simple M partido en caras que también son polígonos simples. Según el enunciado existen 5 vértices y $\frac{5(5-1)}{2} = 10$ aristas de partición. Apliquemos la fórmula de Euler en la forma siguiente: $V - A + C = 2$, donde el número de caras contiene un complemento de M respecto

al plano o la «cara» no limitada. De aquí C = 7. Dado que dos vértices del grafo pueden unirse sólo por una arista, en la frontera de cada cara (incluyendo la no limitada) hay por lo menos tres aristas. Por eso $3C \leqslant 2A$; de aquí $C \leqslant \frac{2}{3} A = \frac{20}{3} < 7$.

14. La desigualdad (5.10) se obtiene a partir de la fórmula de Pick (5.1), considerando la desigualdad $L \geqslant b$. Si el polígono está dividido en cuadrados, entonces $L = b$.

15. La primera fórmula se demuestra igual que la fórmula (5.7), tomando en consideración el hecho de que ahora el área del triángulo primitivo es igual a $\frac{1}{8}$. La segunda se desprende de la primera y de (5.7), eliminando los términos $-\chi(M) + \frac{1}{2}\chi(\partial M)$.

17. Elijamos tales vértices $v_1, \ldots, v_n$ del poliedro X, situados a diferente altura y numerados en orden de su crecimiento, de manera que la altura de cada vértice restante coincida con la de uno de estos vértices elegidos. Consideremos la suma $S(h) = V(h) - A(h) + C(h)$, donde $V(h)$ es el número de vértices del poliedro ya encontrados por el plano móvil Q en el momento cuando éste se encuentra a una distancia h de su posición inicial (y análogamente para $A(h)$ y $C(h)$). La suma $S(h)$ puede variar sólo al pasar Q por los vértices $v_1, \ldots, v_n$. Cuando v_1 yace en Q, la intersección $Q \cap \partial X$ es cara, arista, o vértice; a partir de aquí concluimos que en este momento $S(h) = 1$. Igual aspecto tiene la intersección $Q \cap \partial X$ en el momento cuando v_n se encuentra en Q; de aquí se desprende que la suma $S(h)$ aumenta en 1 al pasar Q por v_n. Cuando Q pasa por el vértice v_i para el cual $2 \leqslant i \leqslant n - 1$, todas las aristas y vértices del poliedro X que en este momento están en el plano Q forman un contorno simple, o bien una o varias quebradas simples no cerradas (posiblemente, que degeneran en vértices). Supongamos, por ejemplo, que al pasar Q por el vértice v_2, en el plano Q se encuentra una quebrada no cerrada C que tiene α aristas y β vértices. Entonces $\beta = \alpha + 1$. Además, sea que de dicha quebrada salen hacia arriba γ aristas y δ caras. Entonces $\delta = \gamma + 1$. Por eso al pasar Q por v_2, la suma $S(h)$ varía en $\beta - (\alpha + \gamma) - \delta = (\alpha + 1) - (\alpha + \gamma) - (\gamma + 1) = 0$, es decir, conserva su valor. Si la quebrada C está cerrada, entonces $\beta = \alpha$ y $\delta = \gamma$, y $S(h)$ tampoco varía. Así será al pasar Q por todos los vértices v_i, $2 \leqslant i \leqslant n - 1$. Por eso $\chi(\partial X) = 2$.

18. Partiendo del enunciado del problema, la fórmula de Euler y las relaciones (7.10) y (7.11), obtenemos consecutivamente:

$$A = \frac{V(V-1)}{2}, \quad C = 2 - V + A, \quad 3C \leqslant 2A.$$

De aquí se infiere:

$$3\left[2 - V + \frac{V(V-1)}{2}\right] \leqslant V(V-1)$$

o bien

$$V^2 - 7V + 12 \leqslant 0.$$

Entre los números enteros, son soluciones de dicha igualdad solamente V = 3 y V = 4. Dado que el poliedro no puede tener tres vértices, entonces V = 4, o sea el poliedro es un tetraedro.

19. La formulación de la afirmación reza: si cada dos caras de un poliedro tienen un lado común, el poliedro es un tetraedro.

20. Supongamos que el número de cambios de signo alrededor de cada vértice no es menor de 4. Sea N la suma de dichos números tomada respecto a todos los vértices. Según la suposición, tenemos

$$N \geqslant 4V. \qquad (S.3)$$

Consideremos además el número de cambios de signo al recorrer la frontera de cada cara y la suma de todos aquellos números. Un cambio de signo está enlazado con un solo par de aristas que tienen un vértice común y designados con signos diferentes por tanto el número total de cambios, al recorrer todas las caras, es igual al número total de cambios al recorrer todos los vértices, es decir, es igual a N. El número de cambios de signo, al recorrer una cara m-angular, es evidentemente par y no excede de m; por eso

$$N \leqslant 4C_4 + 4C_5 + 6C_6 + 6C_7 + \ldots \qquad (S.4)$$

Utilizando las igualdades (S.3) y (S.4), así como las fórmulas (7.1) y (7.10), obtenemos

$$\begin{gathered} 4V \leqslant N \leqslant 4C_4 + 4C_5 + 6C_6 + 6C_7 + \ldots \leqslant \\ \leqslant 2C_3 + 4C_4 + 4C_5 + 6C_6 + 6C_7 + \ldots = \\ = 2(3C_3 + 4C_4 + 5C_5 + \ldots) - 4(C_3 + C_4 + C_5 + \ldots) = \\ = 4A - 4C = 4V - 8, \end{gathered}$$

lo cual es imposible.

Afirmación dual: existe tal cara de un poliedro, recorriendo la cual, el número de cambios de signo no excede de 2.

21. De la desigualdad $3C \leqslant 2A$ se desprende que $A \geqslant 15/2$, es decir, $A \geqslant 8$. De la fórmula de Euler obtenemos que $V = A - 3$. Entonces la desigualdad dual $3V \leqslant 2A$ da $3(A - 3) \leqslant 2A$ o bien $A \leqslant 9$. Así pues, son admisibles sólo dos valores, a saber: $A = 8$ y $A = 9$. En el primer caso, a partir de la fórmula de Euler, obtenemos que $V = 5$, en el segundo que $V = 6$. Un poliedro que tiene $C = 5$, $A = 8$, $V = 5$ existe; es una pirámide cuadrangular. Un poliedro que tiene $C = 5$, $A = 9$, $V = 6$ es, por ejemplo, un prisma triangular.

Problema dual: un poliedro convexo tiene 5 vértices; ¿cuántas caras y cuántas aristas tiene?

22. Sustituyamos en la fórmula $2V - 2A + 2C = 4$ todos los términos del primer miembro, valiéndonos de las desigualdades (7.7), (7.9) y (7.8):

$$2\sum_{i\geqslant 3} V_i - \sum_{i\geqslant 3} iV_i + 2\sum_{i\geqslant 3} C_i = 4. \qquad (S.5)$$

Multipliquemos ambos miembros de (S.5) por n y sumemos la igualdad obtenida, término a término, con

$$2\sum_{i\geqslant 3} iV_i - 2\sum_{i\geqslant 3} iC_i = 0.$$

Entonces

$$\sum_{i \geqslant 3} (2n - ni + 2i) \, V_i + 2 \sum_{i \geqslant 3} (n - i) \, C_i = 4n.$$

23. Asignemos a cada vértice de cada cara del poliedro el número 1/3 considerado como su «peso». Entonces la suma de los pesos tomada respecto a todas las caras y todos sus vértices será igual a V, es decir, al número de vértices del poliedro. Del enunciado del problema y la desigualdad (7.13) se desprende que el poliedro tiene caras pentagonales. Hallemos la suma de los pesos extendida a todos los vértices de las caras penta y hexagonales. Supongamos que ninguna cara pentagonal hace contacto con una cara pentagonal o hexagonal. En vista de dicha suposición, la suma señalada, tomada respecto a todas las caras pentagonales, es igual a $\frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 5C_5 = 5C_5$. Pero las caras hexagonales pueden tocar una a otra. Por eso la suma que les corresponde es igual a $\frac{1}{3} \cdot 6C_6 = 2C_6$. Por eso obtenemos

$$5C_5 + 2C_6 < V. \qquad (S.6)$$

siendo estricta la desigualdad, puesto que no se han tomado en consideración todos los pesos de los vértices de las caras n-angulares para $n \geqslant 7$. Por otro lado, la igualdad (7.16) para $n = 7$ y $V = V_3$ proporciona

$$4C_5 + 2C_6 - 2C_8 - 4C_9 - \ldots = 28 + V$$

o bien

$$4C_5 + 2C_6 \geqslant 28 + V,$$

lo cual contradice a (S.6).

24. 6.

25. 166.

26. La característica de Euler de la figura es igual a 1.

27. La característica de Euler de la figura es igual a

$$\binom{n}{1} - \binom{n}{2} + \binom{n}{3} - \ldots + (-1)^{n+1} \binom{n}{n} = 1.$$

28. Para cualquier partición de la esfera en caras poligonales estrictamente convexas se cumplen todas las relaciones deducidas en el § 7. Por eso de la desigualdad (7.13) se sigue, en particular, que es imposible coser un balón utilizando sólo pedazos hexagonales.

29. Tal punto existe. Efectivamente, si por cada punto de intersección de dos circunferencias mayores pasara una tercera, entonces considerando el enunciado del problema) obtendríamos la partición de la esfera en caras estrictamente convexas y cada vértice de tal partición tendría un grado $\geqslant 6$, lo cual contradice a la desigualdad (7.14).

30. Tal figura es, por ejemplo, la frontera de cualquier poliedro convexo.

31. Pongamos $A = \bigcup_{i=1}^{3} A_i$, $B = \bigcup_{i=1}^{3} A_i$. Entonces $\chi(A) = 3 - 3 + \chi(B) = \chi(B)$. A partir del enunciado tenemos $\chi(A) =$

$= 1$, por eso $\chi(B) = 1$, desprendiéndose de aquí inmediatamente la afirmación necesaria.

32. Pongamos $A = \bigcup_{i=1}^{4} A_i$, $B = \bigcap_{i=1}^{4} A_i$. Entonces

$$\chi(A) = \binom{4}{1} - \binom{4}{2} + \binom{4}{3} - \chi(B) = 2 - \chi(B).$$

Necesitamos demostrar que $B \neq \varnothing$. Con este propósito basta comprobar que $\chi(B) \neq 0$. Supongamos lo contrario: que $\chi(B) = 0$, entonces $\chi(A) = 2$. Dado que cada dos polígonos tienen un punto común, la figura A es conexa; por tanto, $c(A) = 1$, y a partir de la fórmula (12.1) obtenemos que $c^*(A) = 0$. La última igualdad significa que A coincide con el plano. Pero esto es imposible, porque la figura A está limitada, y el plano no.

33. Supongamos que están dados los polígonos A_1, A_2, A_3, A_4. Demostremos que la intersección de cada tres de ellos no es vacía, entonces la afirmación necesaria se desprende del problema anterior. Pongamos $A = \bigcup_{i=1}^{3} A_i$, $B = \bigcap_{i=1}^{3} A_i$. Entonces, al igual que en el problema 31, $\chi(A) = \chi(B)$. Según el enunciado $c(A) = 1$ y $c^*(A) = 1$. Por eso, a partir de la fórmula (12.1), tenemos que $\chi(A) = 1$ y $\chi(B) = 1$. Luego $B \neq \varnothing$. Análogamente se comprueba que la intersección de todas las ternas de polígonos no es vacía.

35. En $\frac{1}{2}(n^2 - 3n + 4)$ partes.

36. Pongamos $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, donde A_i son segmentos. Puesto que $c(A) \leqslant n$ y $c^*(A) \geqslant 1$, a partir de la fórmula (12.1), obtenemos que $\chi(A) \leqslant n$. El primer miembro de la desigualdad se demuestra por inducción respecto al número de segmentos n. Para $n = 1$ dicha desigualdad es evidente. Supongamos que está demostrada para todos $n \leqslant m$. Demostrémosla para $n = m + 1$. Sea $B = \bigcup_{i=1}^{m+1} A_i$. Según la suposición tenemos $\chi\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right) \geqslant \frac{m(3-m)}{2}$, entonces

$$\chi(B) = \chi\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right) + \chi(A_{m+1}) - \chi\left[A_{m+1} \cap \left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right)\right] \geqslant$$

$$\geqslant \frac{m(3-m)}{2} + 1 - \chi\left[\bigcup_{i=1}^{m} (A_{m+1} \cap A_i)\right].$$

Tomando en consideración que $\chi\left[\bigcup_{i=1}^{m} (A_{m+1} \cap A_i)\right] \leqslant m$ obtenemos

$$\chi(B) \geqslant \frac{m(3-m)}{2} + 1 - m = \frac{(m+1)[3-(m+1)]}{2}.$$

37. Pongamos que están dados los polígonos estrictamente convexos A_1, A_2, ..., A_5 y que cada cuatro de ellos tienen una

intersección vacía. Según el teorema 3, cada cuatro polígonos y, por tanto, los cinco cubren la esfera S; entonces

$$2 = \chi(S) = \binom{5}{1} - \binom{5}{2} + \binom{5}{3} = 5.$$

La contradicción obtenida demuestra la afirmación necesaria.

38. Supongamos que cada cuatro polígonos cubren la esfera S. Entonces, según el teorema 3, cada tres de ellos tienen una intersección no vacía, y cada cuatro, una intersección vacía. Sea que son en total m polígonos ($m \geqslant 5$). En este caso

$$2 = \chi(S) = \binom{m}{1} - \binom{m}{2} + \binom{m}{3} = 1 + \binom{m-1}{3}.$$

De aquí $\binom{m-1}{3} = 1$ o bien $m = 4$, lo cual es imposible.

BIBLIOGRAFIA

1. Болтянский В. Г., Ефремович В. А. *Наглядная топология.* — М.: Наука, 1982 (Boltianski V., Efremóvich V. Topología evidente).

2. Danzer L., Grünbaum B. a.o. *Helly's Theorem and Its Relatives*, Providens, 1963.

3. Кушниренко А. Г. *Целые точки в многоугольниках и многогранниках.* — Квант, 1977, № 4, (Kushnirenko A. G. Puntos enteros en polígonos y poliedros).

4. Люстерник Л. А. *Выпуклые фигуры и многогранники.* — М.: Гостехиздат, 1956 (Liustérnik L. A. Figuras y poliedros convexos).

5. Hadwiger H., Debrunner H. *Kombinatorische Geometrie in der Ebene.* Monografies de «L» Enseignement Mathématique», No 2. Inst. de Mathématiques, Université, Geneve, 1960.

6. Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М. *Геометрические оценки и задачи из комбинаторной геометрии.* — М.: Наука, 1974 (Shkliarski D. O., Chentsov N. N., Yaglom I. M. Estimaciones geométricas y problemas de geometría combinatoria).

7. Яглом И. М. *Заплаты на кафтане.* — Квант, 1974, № 2 (Yaglom I. M. Remiendos sobre el kaftán).

